

Физика

УДК 621.039

А. В. ОВСЕПЯН, Г. Г. АРУТЮНЯН, И. Н. АЙРАПЕТЯН

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОПЛИВА В
 КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

В работе предлагается решение задачи оптимизации распределения горючего в цилиндрическом реакторе методом Понтрягина. Ищется оптимальное распределение горючего в реакторе при условии минимальности среднего квадратичного отклонения удельного тепловыделения.

В однорупповом приближении с помощью принципа максимума Понтрягина [1—3] решается задача нахождения оптимального распределения горючего в цилиндрическом реакторе с размерами h и R (h —высота, R —радиус активной зоны) с фиксированной мощностью

$$W=2 \int_0^{h/2} \int_0^R \frac{K_{\infty}(r)}{v} \Phi(r, z) 2\pi r dr dz,$$

где $K_{\infty}(r)$ —коэффициент размножения нейтронов, v —среднее число нейтронов, рожденных при одном акте деления, а $\Phi(r, z)$ —поток нейтронов, который удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\Delta \Phi(r, z) + \frac{K_{\infty}(r) - 1}{L^2} \Phi(r, z) = 0,$$

L —длина миграции.

В цилиндрических координатах (r, z, φ) с учетом симметрии по φ последнее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{K_{\infty}(r) - 1}{L^2} \Phi(r, z) = 0,$$

допускающий разделение переменных

$$\Phi(r, z) = R(r)Z(z),$$

в результате чего получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\sigma^2 Z(z), \tag{1}$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{(K_0(r) - 1)}{L^2} R(r) + \sigma^2 R(r). \quad (2)$$

Учитывая симметрию $Z(z)$ относительно центра реактора по высоте ($z=0$) решение уравнения (1) ищем в виде $Z(z) = A \cos(\sigma z)$. Граничное условие $Z\left(\frac{h}{2} + d_{\log}\right) = 0$ (d_{\log} — длина экстраполяции) для постоянной σ дает следующее значение:

$$\sigma = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(h/2 + d_{\log})}.$$

Вводя обозначение $1 + \sigma^2 L^2 = \beta^2$ и измеряя r в единицах длины миграции ($r = r/L$), перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + [K_0(r) - \beta^2] R(r) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является однородным дифференциальным уравнением относительно $R(r)$. Это обстоятельство позволяет перенормировать $R(r)$, приравняв $W = 1$, так что

$$\int_0^R K_0(r) R(r) r dr = 1. \quad (4)$$

В настоящей работе ищется оптимальное распределение горючего в реакторе при условии минимальности среднего квадратичного отклонения удельного тепловыделения. Следовательно, минимизируемый интеграл имеет вид

$$I = 2 \int_0^{h/2} dz \int_0^R \left\{ \frac{K_0(r) \Phi(r, z)}{v} - \bar{\psi} \right\}^2 \cdot 2\pi r dr, \quad (5)$$

где $\bar{\psi}$ — среднее удельное тепловыделение в реакторе. (5) можно переписать в виде

$$I = 4\pi \int dz \int \frac{K_0^2 Z^2(z)}{v^2} R^2(r) r dr + \bar{\psi}^2 V - 2\bar{\psi} W,$$

где V — фиксированный объем реактора, W — мощность. Поскольку V и W — заданные величины для выполнения требуемого условия достаточно минимизировать выражение

$$I = \int_0^R K_0^2(r) R^2(r) r dr.$$

Выберем в качестве фазовых переменных следующие функции:

$$X^{(0)} = 1, \quad X^{(1)} = R(r), \quad X^{(2)} = \frac{dR(r)}{dr}, \quad X^{(3)} = W.$$

Соответствующие уравнения [1—3] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dX^{(0)}}{dr} &= K_{\infty}^2(r)[X^{(1)}]^2 \cdot r \equiv f^{(0)}, \\ \frac{dX^{(1)}}{dr} &= X^{(2)} \equiv f^{(1)}, \\ \frac{dX^{(2)}}{dr} &= -\frac{1}{r}X^{(2)} - [K_{\infty}(r) - \beta^*]X^{(1)} \equiv f^{(2)}, \\ \frac{dX^{(3)}}{dr} &= K_{\infty}(r)X^{(1)} \cdot r \equiv f^{(3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Системе уравнений (6) соответствует функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H = & \sum \psi_i f^{(i)} = \psi_0 \cdot K_{\infty}^2(r)[X^{(1)}]^2 \cdot r + \psi_1 X^{(2)} + \\ & + \psi_2 \left\{ -\frac{1}{r}X^{(2)} - [K_{\infty}(r) - \beta^*]X^{(1)} \right\} + \psi_3 K_{\infty}(r)X^{(1)}r, \end{aligned} \quad (7)$$

где ψ_i — сопряженные функции, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dr} &= -\frac{\partial H}{\partial X^{(0)}} = 0, \\ \frac{d\psi_1}{dr} &= -\frac{\partial H}{\partial X^{(1)}} = -2\psi_0 K_{\infty}^2(r)X^{(1)}r + \psi_2(K_{\infty}(r) - \beta^*) - \psi_3 K_{\infty}(r) \cdot r, \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= -\frac{\partial H}{\partial X^{(2)}} = -\psi_1 + \frac{\psi_2}{r}; \quad \frac{d\psi_3}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial X^{(3)}} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что ψ_0 и ψ_3 — постоянные величины, причем известно [3], что ψ_0 должна быть отрицательной величиной (в данной работе $\psi_0 = -1$).

Запишем граничные условия. На оси цилиндра из соображений симметрии (в точке $r=0$ поток нейтронов имеет экстремум) следует

$$X^{(2)}(0) = 0,$$

а из условия трансверсальности

$$\psi_1(0) = 0.$$

На логарифмической границе нейтронный поток равен нулю, т. е.

$$X^{(1)}(R_0) = 0, \text{ где } R_0 = R + d_{\log}.$$

Условие трансверсальности на логарифмической границе дает

$$\psi_2(R_0) = 0.$$

Роль управления в этой задаче играет $K_{\infty}(r)$. Поскольку H является нелинейной функцией управления, поэтому, вообще говоря, может реализоваться классическое управление, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial H}{\partial K_{\infty}} = 0.$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial K_{\infty}^2} = \psi_0 2 [X^{(1)}]^2 \cdot r \leq 0.$$

Классическое управление $K_{\infty}^{\text{класс}} = \frac{\psi_2 - \psi_3 r}{2\psi_0 X^{(1)} r}$ соответствует максимуму H (здесь учтено, что $\psi_0 < 0$).

Учитывая наличие нижней и верхней границ для $K_{\infty}(r)$

$$K_{\infty}^H \leq K_{\infty}(r) \leq K_{\infty}^b,$$

приходим к заключению, что активную зону нужно разбить, по крайней мере, на три зоны. Естественно предположить, что в центральной и периферийной зонах работает неклассическое управление:

$$K_{\infty} = K_{\infty}^H \text{ в центральной зоне } 0 \leq r \leq r_{12},$$

$$K_{\infty} = K_{\infty}^b \text{ в периферийной зоне } r_{23} \leq r \leq R,$$

а в промежуточном кольце $r_{12} \leq r \leq r_{23}$ — классическое управление $K_{\infty}^{\text{класс}}$.

Запишем уравнения, которым удовлетворяют $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и ψ_1 , ψ_2 . Условимся называть зону с управлением K_{∞}^H — первой, зону с классическим управлением $K_{\infty}^{\text{класс}}$ — второй и периферийную зону с K_{∞}^b — третьей и введем вместо ψ_2 функцию $\tilde{\psi}_2 = \psi_2 / r$.

1 зона:

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\psi}_2}{dr} + \varepsilon_1 \tilde{\psi}_2 = 2\psi_0 (K_{\infty}^H)^2 X^{(1)} + \psi_3 K_{\infty}^H, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 X^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX^{(1)}}{dr} + \varepsilon_1 X^{(1)} = 0, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_1 = K_{\infty}^H - \beta^2.$$

Решением (10) является

$$X^{(1)} = C_0 I_0(\sqrt{\varepsilon_1} \cdot r) + C_1 Y_0(\sqrt{\varepsilon_1} \cdot r),$$

причем из граничного условия на оси цилиндра получаем равенство нулю постоянной интегрирования $C_1 = 0$. Здесь $I_0(\sqrt{\varepsilon_1} r)$ — функция Бесселя первого рода с индексом ν , а $Y_0(\sqrt{\varepsilon_1} r)$ — функция Бесселя второго рода с индексом ν . С учетом последнего решения интегрируем уравнение (9). В результате получаем

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_3 K_1 + C_0' \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m z^{2m+2} + C_0 I_0(z),$$

где λ_m определяются следующими рекуррентными формулами:

$$\lambda_0 = \frac{K_2}{4}, \quad \lambda_m = \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \frac{K_2(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} - \lambda_{m-1} \right\}, \quad m \geq 0,$$

а

$$Z = \sqrt{\varepsilon_1} r, \quad K_1 = \frac{K_\infty^{II}}{\varepsilon_1}, \quad K_2 = \frac{2\psi_0(K_\infty^{II})^2}{\varepsilon_1}.$$

II зона:

$$\frac{d^3 \tilde{\psi}_2}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\psi}_2}{dr} - \beta^2 \tilde{\psi}_2 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 X^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX^{(1)}}{dr} - \beta^2 X^{(1)} + \frac{\tilde{\psi}_2 - \psi_3}{2\psi_0} = 0. \quad (12)$$

Решение (11) можно записать в виде

$$\tilde{\psi}_2 = C_2 I_0(\sqrt{\beta^2} r) + C_3 K_0(\sqrt{\beta^2} r),$$

где I_ν — модифицированная функция Бесселя первого порядка с индексом ν , K_ν — модифицированная функция Бесселя второго порядка с индексом ν . Интегрирование уравнения (12) дает

$$X^{(1)} = C_2 I_0(t) + C_3 K_0(t) - N_1 \psi_3 + C_2 \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m t^{2m+2} + C_3 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\delta_m}{dv} + \delta_m \ln t \right) t^{2m+2}.$$

Здесь $\sqrt{\beta^2} \cdot r = t$, $N_1 = \frac{1}{2\psi_0\beta^2}$, μ_m и δ_m определяются из рекуррентных формул

$$\mu_0 = -\frac{N_1}{4}, \quad \mu_m = \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \mu_{m-1} - \frac{N_1}{(m!)^2 2^{2m}} \right\},$$

$$\delta_0 = \frac{N_1}{4}, \quad \delta_m = \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \delta_{m-1} + \frac{N_1}{(m!)^2 2^{2m}} \right\},$$

$$\frac{d\delta_0}{dv} = -\frac{N_1}{4} (1 - \gamma + \ln 2) = -\delta_0 (1 - \gamma + \ln 2),$$

$$\frac{d\delta_m}{dv} = -\frac{2\delta_m}{2m+2} + \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ -\frac{d\delta_{m-1}}{dv} - \frac{4\delta_0}{(m!)^2 2^{2m}} \left[\ln 2 - \gamma + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right] \right\}.$$

III зона:

$$\frac{d^3 \tilde{\psi}_2}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\psi}_2}{dr} + \varepsilon_{III} \tilde{\psi}_2 = 2\psi_0 (K_\infty^b)^2 X^{(1)} + \psi_3 K_\infty^b, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 X^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX^{(1)}}{dr} + X^{(1)} \varepsilon_{III} = 0 \quad \varepsilon_{III} = K_{\infty}^b - \beta^2. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$X^{(1)} = C_4 I_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} r) + C_5 Y_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} r).$$

Учитывая граничное условие $X^{(1)}(R_0) = 0$ ($R_0 = R + d_{\log}$), найдем следующую связь между C_4 и C_5 :

$$C_5 = -C_4 \frac{I_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} R_0)}{Y_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} R_0)} = -C_4 p$$

в результате

$$X^{(1)} = C_4 \{I_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} r) - p Y_0(\sqrt{\varepsilon_{III}} r)\}.$$

В результате интегрирования уравнения (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 = & C_4 I_0(x) + C_5 Y_0(x) + \psi_3 M_1 + C_4 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m x^{2m+2} + \\ & + C_4 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m+2} \left\{ \frac{db_m}{dv} + \ln x \cdot b_m \right\}, \end{aligned}$$

где

$$x = \sqrt{\varepsilon_{III}} r, \quad M_1 = \frac{K_{\infty}^b}{\varepsilon_{III}}, \quad M_2 = \frac{2\psi_0(K_{\infty}^b)^2}{\varepsilon_{III}},$$

$$M_3 = -2\psi_0(K_{\infty}^b)^2 \cdot p,$$

а коэффициенты σ_m и b_m определяются из рекуррентных формул

$$\sigma_0 = \frac{M_2}{4}, \quad \sigma_m = \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \frac{M_2(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} - \sigma_{m-1} \right\},$$

$$b_0 = \frac{M_3}{4}, \quad b_m = \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \frac{M_3(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} - b_{m-1} \right\},$$

$$\frac{db_0}{dv} = -b_0(\ln 2 + 1 - \gamma),$$

$$\frac{db_m}{dv} = -\frac{2b_m}{(2m+2)} - \frac{1}{(2m+2)^2} \left\{ \frac{4b_0(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} \left[\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \gamma + \ln 2 \right] + \frac{db_{m-1}}{dv} \right\}.$$

Отметим, что для нахождения частных решений неоднородных уравнений (13), (8), (9) $Y_0(x)$ и $K_0(t)$ были представлены в виде

$$Y_0(x) = \left[\frac{dl}{dv} \right]_{v=0}, \quad K_0(t) = - \left[\frac{dl}{dv} \right]_{v=0}.$$

Для удобной записи формул введем обозначения

$$\sum \lambda_m z^{2m+2} \equiv A(z), \quad \sum \mu_m t^{2m+2} \equiv B(t),$$

$$\sum \left[\frac{d\delta_m}{dv} + \delta_m \ln t \right] t^{2m+2} \equiv C(t),$$

$$\sum \sigma_m x^{2m+2} \equiv D(x), \quad \sum \left\{ \frac{db_m}{dv} + b_m \ln x \right\} x^{2m+2} \equiv G(x),$$

$\gamma = 0,577$ (пост. Эйлера).

Условия непрерывности $X^{(1)}$ и ψ_2 и их первых производных на границах зон Γ_{12} и Γ_{23} , условия трансверсальности для ψ_1 и ψ_2 , а также условия нормировки функций $R(r)$ (4) образуют систему из десяти линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $\psi_3, C_0, C_2, C_3, C_4, C_5, C'_0, C'_2, C'_3, C'_4$:

1. $\psi_3 M_1 + C_4 J_0(x_0^*) + C_5 Y_0(x_0^*) + C_4 [D(x_0^*) + G(x_0^*)] = 0.$
2. $\psi_3 K_1 + C_0 A(z_{12}) + C_0 J_0(z_{12}) - C_2 I_0(t_{12}) - C_3 K_0(t_{12}) = 0.$
3. $-\psi_3 M_1 - C_4 J_0(x_{23}) - C_5 Y_0(x_{23}) - C_4 [D(x_{23}) + G(x_{23})] + C_2 I_0(t_{23}) + C_3 K_0(t_{23}) = 0.$
4. $N_1 \psi_3 - C'_2 K_0(t_{12}) - C'_2 I_0(t_{12}) + C_0 J_0(z_{12}) - C_2 B(t_{12}) - C_3 C(t_{12}) = 0.$
5. $-N_1 \psi_3 + C_2 B(t_{23}) + C_3 C(t_{23}) + C'_3 K_0(t_{23}) + C'_2 I_0(t_{23}) - C'_4 [J_0(x_{23}) - p Y_0(x_{23})] = 0.$
6. $C_0 A'(z_{12}) \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\beta^2}} - C_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\beta^2}} J_1(z_{12}) - C_2 I_1(t_{12}) + C_3 K_1(t_{12}) = 0.$
7. $C_2 I_1(t_{23}) \sqrt{\frac{\beta^2}{\epsilon_{III}}} - C_3 \sqrt{\frac{\beta^2}{\epsilon_{III}}} K_1(t_{23}) + C_4 J_1(x_{23}) + C_5 Y_1(x_{23}) - C_4 [D'(x_{23}) + G'(x_{23})] = 0.$
8. $C'_2 I_1(t_{12}) - C'_3 K_1(t_{12}) + C_2 B'(t_{12}) + C_3 C'(t_{12}) + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\beta^2}} C_0 J_1(z_{12}) = 0.$
9. $C'_2 I_1(t_{23}) - C'_3 K_1(t_{23}) + C_2 B'(t_{23}) + C_3 C'(t_{23}) + \sqrt{\frac{\epsilon_{III}}{\beta^2}} C_4 [J_1(x_{23}) - p Y_1(x_{23})] = 0.$
10. $C_0 \frac{K_{\infty}^H}{\epsilon_1} z_{12} J_1(z_{12}) + C_2 \frac{t_{23} I_1(t_{23}) - t_{12} I_1(t_{12})}{2\psi_0 \beta^2} + C_3 \frac{t_{12} K_1(t_{12}) - t_{23} K_1(t_{23})}{2\psi_0 \beta^2} + \psi_3 \frac{t_{12}^2 - t_{23}^2}{4\psi_0 \beta^2} + C_4 \frac{K_{\infty}^b}{\epsilon_{III}} \{x_0 J_1(x_0) - x_{23} J_1(x_{23}) + p [x_{23} Y_1(x_{23}) - x_0 Y_1(x_0)]\} = 1.$

Здесь $x_0^* = (R + d_{10g}) \sqrt{\epsilon_{III}}$, $x_0 = \sqrt{\epsilon_{III}} \cdot R$, а штрихи означают производную по соответствующему аргументу.

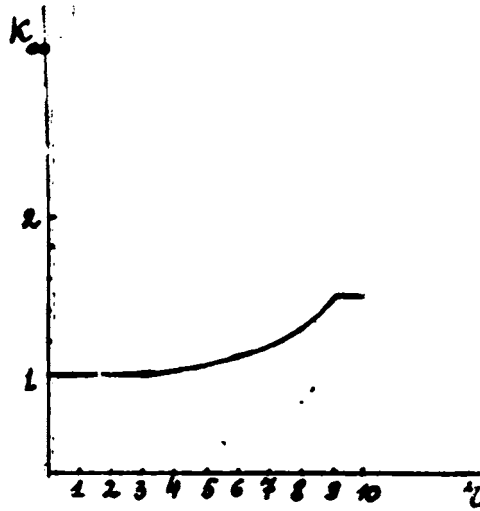
В настоящей работе предлагается следующий способ определения оптимальной компоновки зон. Значения Γ_{12} и Γ_{23} задаются, после этого численным образом решается приведенная выше система алгебраических

уравнений относительно постоянных интегрирования, а затем проверяются условия непрерывности K_{∞} на границах r_{12} и r_{23} , т. е. $K_{\infty}(r_{12})$ и $K_{\infty}(r_{23})$, которые выражаются следующим образом:

$$K_{\infty}(r_{ik}) = \frac{C_2 I_0(t_{ik}) + C_3 K_0(t_{ik}) - \psi_3}{2\psi_0 [C_2' I_0(t_{ik}) + C_3' K_0(t_{ik}) - N_1 \psi_3 + C_2 B(t_{ik}) + C_3 C(t_{ik})]},$$

где $ik=12$ или 23 , и сравниваются соответственно со значениями K_{∞}^H и K_{∞}^b .

Кроме того, при каждом счете K_{∞} вычисляется значение гамильтониана.



Изменение коэффициента размножения нейтронов вдоль радиуса реактора.

В качестве примера нами подсчитано распределение $K_{\infty}(r)$ для цилиндрического реактора размерами: высота $H=250$ см, радиус $R=139,65$ см, длина миграции $L=8,148$ см, длина экстраполяции $2d_{\log}=25$ см, $K_{\infty}^H=1,01$, $K_{\infty}^b=1,5$.

Результаты расчетов приведены на рисунке, где r задано в длинах миграции.

Кафедры ядерной физики,
Кафедры физики высоких энергий
Кафедры теоретической физики

Поступила 24.02.1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1965.
2. Рудик А. П. Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. М.: Атомиздат, 1971.
3. Рудик А. П. Оптимальное расположение ядерного горючего в реакторе. М.: Атомиздат, 1974.

Հ. Վ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ, Գ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ի. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՎԱՌԵԼԻՔԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱՑՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՌԵԱԿՏՈՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Այս աշխատանքում առաջարկվում է գլանային ռեակտորում վառելիքի բաշխման օպտիմացման խնդրի լուծումը Պոնտրյագինի մեթոդով: Փնտրվում է ռեակտորում վառելիքի օպտիմալ բաշխումը այն պայմանի դեպքում, երբ սեռականորեն ջերմասանջատման միջին քառակուսային շեղումը մինիմալ է: