УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТЫМИ И КРАТНЫМИ РЯДАМИ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЛЕЖАНДРА

В работе рассматривается вопрос о представлении измеримых функций простыми и кратными рядами по многочленам Лежандра в смысле сходимости почти всюду.

Пусть $P_0(x)$; $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$; $n\geq 1$; $x\in[-1;\ 1]$—многочлены Лежандра.

Д. Е. Меньшовым доказаны следующие теоремы (см. [1—3]).

Теорема А. (Д. Е. Меньшов). Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi;\ \pi]$, существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi;\ \pi]$.

Теорема В. (*Д. Е.* Меньшов). Пусть $f(x)$—измеримая функция, конечная почти всюду на $[-\pi;\ \pi]$. Тогда, каким бы ни было $\varepsilon>0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $E_\varepsilon\subset[-\pi,\ \pi]$, $\mathrm{mes}E_\varepsilon>2\pi-\varepsilon$, и такую, чтобы ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходился равномерно.

Теорема С. (Д. Е. Меньшов). Пусть $Q\subset[-\pi;\ \pi]$—любое совершенное нигде не плотное множество.

Тогда для любой суммируемой функции $f(x)$ можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, чтобы $g(x)=f(x)$ на Q и ряд Фурье сходился почти всюду.

Вопросам представления измеримых функций тригонометрическими рядами и общими ортогональными рядами посвящено много работ.

Например, обзорные статьи А. А. Талаляна [4], П. Л. Ульянова [5].

Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть Q—любое совершенное нигде не плотное множество на $[-1;\ 1]$. Тогда существует ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \tag{1}$$

обладающий следующими двумя свойствами.

1°. Для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-1;\ 1]$, и для всякого $\varepsilon>0$ можно определить непрерывную на $[-1;\ 1]$ функцию $g(x)$ и из ряда (1) выделить подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} P_{n_k}(x);\quad 1\leqslant n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots,$$

который сходится почти всюду на $[-1;\ 1]$ к функции $f(x)$.
$|\{x;\ g(x)\neq f(x)\}|<\varepsilon$; ряд Фурье-Лежандра вновь полученной функции $g(x)$ является подрядом ряда (1) и сходится равномерно.

2°. Для любой функции $F(x)\in L[-1;\ 1]$ можно найти такую функцию $G(x)\in L(-1;\ 1)$, чтобы $G(x)=F(x)$ на Q и ряд Фурье-Лежандра вновь полученной функции $G(x)$ являлся подрядом ряда (1) и сходился к ней почти всюду на $[-1;\ 1]$.

Следствие. Существует ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_{m_i} P_{m_i}(x)$; $m_i<m_{i+1}$, сходящийся почти всюду к нулю, у которого не все коэффициенты равны нулю.

Теорема 2. Существует двойной ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} c_{k,s} P_k(x) P_s(y) \tag{2}$$

со свойством: для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x,\ y)$, определенной на $T=[-1;\ 1]\times[-1;\ 1]$, и для всякого $\varepsilon>0$ можно определить непрерывную на T функцию $g(x,\ y)$ и из ряда (1) выделить подряд

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{k_i\cdot s_j} P_{k_i}(x) P_{s_j}(y) \qquad \begin{matrix} s_1<s_2<\ldots<s_j<\ldots, \\ k_1<k_2<\ldots<k_i<\ldots, \end{matrix}$$

который сходится п. в. на T к функции $f(x)$ как по прямоугольникам, так и по сферам

$$|\{(x;\ y)\in T;\ g(x;\ y)\neq f(x;\ y)\}|<\varepsilon;$$

двойной ряд Фурье-Лежандра вновь полученной функции $g(x;\ y)$ является подрядом ряда (1) и равномерно сходится на T как по прямоугольникам, так и по сферам.

*Теорема 3**. Пусть $Q_k\subset[-1;\ 1]$, $k=1,\ 2$, совершенные, нигде не плотные множества. Тогда существует двойной ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} e_{k,s} P_k(x) P_s(y), \tag{3}$$

---

* В работе [6] нами доказано, что значения любой функции $f(x;\ y)\in L(-\pi\pi)^2$ можно изменить вне $Q=Q_1\times Q_2$ таким образом, чтобы как прямоугольные, так и сферические частичные суммы двойного ряда по тригонометрической системе вновь полученной функции сходились к ней почти всюду.

обладающий тем свойством, что для любой $F(x, y) \in L(T)$ можно определить функцию $G(x, y) \in L$; $G(x, y) = F(x, y)$ на $Q = Q_1 \times Q_2$; двойной ряд Фурье-Лежандра вновь полученной функции $G(x, y)$ является подрядом ряда (1) и сходится к ней почти всюду на T как по прямоугольникам, так и по сферам.

Отметим, что ряд Фурье-Лежандра функции $f_0(x) = (1+x)^{-3/4}$ $x \in (-1; 1)$ (см. [7], с. 321) расходится всюду на $(-1; 1)$, и функции $f(x) \in L^p(-1; 1)$ разлагаются в сходящиеся в L^p ряды Фурье по многочленам Лежандра только для $\frac{4}{3} < p < 4$ (см. ([8, 9]).

Также отметим, что в отличие от доказательства теоремы С Д. Е. Меньшова схема доказательства второй части теоремы 1 такова: строится ряд (1) такой, чтобы после изменения значений любой функции $F(x)$ вне Q вновь полученная функция $G(x)$ представлялась рядом $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ в метрике L^1, члены которого, выбранные из ряда (1), являются непересекающимися полиномами

$$h_k(x) = \sum_{i=N_k}^{M_k} a_i P_i(x); \quad N_k < M_k < N_{k+1},$$

внутренние колебания которых стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} [\sup_{N_k < n < M_k} | \sum_{i=N_k}^{n} a_i P_i(x) |] = 0$$

почти всюду.

Замечание 1. Теорема 1 верна как для тригонометрической системы, так и для системы Уолша.

Замечание 2. В работе [10] К. С. Казаряном доказано, что теорема В Д. Е. Меньшова в классе полных равномерно ограниченных ортонормированных систем не верна, а в работе [11] Б. С. Кашином построена полная в $L^2[0; 1]$ ортонормированная система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций, такая, что из сходимости почти всюду ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$ следует $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Очевидно, что для ПОНС$\{\psi_k(x)\}$ теоремы А и С Д. Е. Меньшова не верны.

В связи с этим в работе [12] нами установлено, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L^2(0, 1)$ ортонормированная система ограниченных функций и $\varepsilon > 0$ положительное число, то существуют измеримое множество $E^* \subset [0, 1]$; $|E| > 1 - \varepsilon$ и возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, обладающие следующим свойством: для любой функции $f(x) \in L^1$ можно найти функцию $g(x) = f(x)$ на E и $g(x) \in L^1$ такую, чтобы подпоследовательность $\{S_{m_k}(x; g)\}$ частичных сумм ее ряда Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходилась к $g(x)$ почти всюду и в метрике L^1.

Замечание 3. Теоремы 2 и 3 верны и для n кратных рядов по многочленам Лежандра Якоби, для $n \geqslant 3$ кратной тригонометрической системы, а также для кратных систем Уолша и Хаара.

Кафедра высшей математики *Поступила 14.04.1987*

* Если каждая из $\{\varphi_n(x)\}$ имеет лишь конечное число точек разрыва, то в качестве множества можно взять любое нигде не плотное множество, имеющее меру больше $1 - \varepsilon$ (см. [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Меньшов Д. Е.** Sur series Fouries des fonctions continues.—Мат. сб., 1940, № 8 (50), с. 493—518.
2. **Меньшов Д. Е.** Sur la reprentation des fonctions mesurables par des series trigonometriques.—Мат. сб. 1941, № 9 (51), с. 667—692.
3. **Меньшов Д. Е.** О рядах Фурье от суммируемых функций.—ТММО, 1952, т. I, с. 5—58.
4. **Талалян А. А.** Представление измеримых функций рядами.—Успехи мат. наук, 1960, т. 15, вып. 5, с. 77—141.
5. **Ульянов П. Л.** Представление функций рядами и классы L^φ.—Успехи мат. наук, 1972, т. 27, вып. 2, с. 3—52.
6. **Grigorjan M. G.** On the almost everuwhere convergence of double Fourier series of integrable functions.—Analysis Mathematica, 1985, № 11, p. 201—216.
7. **Гобсон Ф. В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.
8. **Pollard H.** The mean convergence of orthogonal series.—Duke Math. J.—1949, v. 16, № 1, p. 189—191.
9. **Newman J., Rudin W.** Mean conwergence of orthogonal series.—Proc. Amer. Math. Soc., 1952, № 3, p. 219—222.
10. **Казарян К. С.** О некоторых вопросах теории ортогональных рядов.—Мат. сб., 1982, т. 119, № 2, 278—294.
11. **Кашин Б. С.** Об одной полной ортонормированной системе.—Мат. сб., 1976, т. 99, 14А, с. 3.
12. **Григорян М. Г.** О сходимости в метрике L^p и почти всюду подпоследовательностей сферических частичных сумм двойных рядов Фурье по полным ортонормированным системам.—Межвузовский сб. (Математика). 1984, Ереван: вып. 2.
13. **Григорян М. Г.** О сходимости сферических средних Рисса кратных интегралов Фурье.—ДАН Арм. ССР, 1979, т. 69, № 2.

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է համարյա ամենուրեք զուգամիտության իմաստով չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը սովորական և բազմապատիկ շարքերով ըստ Լեժանդրի բազմանդամների։

SUMMARY

The problem of representation of arbitrary functions by usual and multiple series of Legendre polynomials in the sense of convergence in almost everywhere is considered in the paper.