ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1999 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

М. С. ГАБРИЕЛЯН, С. Г. ШАГИНЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы стационарных нелинейных дифференциальных уравнений, асимптотически устойчивых по Ляпунову.

Показано, что при некоторых достаточных условиях тривиальное решение таких систем может становиться неустойчивым по действующей силе.

Пусть имеем систему стационарных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

где $F(x): R^n \to R^n$, $F(0)=0$, – непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица в любой ограниченной области $G \subset R^n$.

Изучается вопрос устойчивости по действующей силе системы (1). Целесообразно привести определение устойчивости по действующей силе, приведенное в [1].

Определение. Скажем, что решение $x=0$ системы (1) устойчиво по действующей силе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t)$ системы

$$\dot{x} = F(x) + \varphi(t) \tag{2}$$

$\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq T$, если $\|x(t_0)\| < \delta$, $\left\|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| < \delta$ для любого возмущения $\varphi(t)$, удовлетворяющего условиям

а) $\left\|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T} \varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$;

б) $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \geq T$ ($T > t_0$ – заданная величина).

Доказывается следующее утверждение:

Теорема. Пусть для системы (1) в R^n существует функция $V(x)$ такая, что:

1) ее производная в ограниченной области $G \subset R^n$, содержащей шар $\|x\| \leq h$ $(h > 0)$, – определенно-отрицательная;

2) существуют область $D \subset R^n$, содержащая шар $\|x-a\| \leq \frac{h_1}{2} + \beta$, и число

$\alpha = \alpha(T) > 0$ – такие, что в D $\dot{V}(x) \ge \alpha$ $(a \in R^n, \|a\| > \frac{3}{2}h_1 + \beta; \beta > 0;$ число $h_1 > 0$ такое, что область G целиком принадлежит шару $\|x\| \le h_1$);

3) на границе D $V(x) = 0;$

4) функция $V(x)$ в областях G и D принимает положительные значения.

Тогда решение $x = 0$ системы (1) неустойчиво по действующей силе.

Доказательство. Так как для системы (1) имеют место все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Покажем, что это решение неустойчиво по действующей силе. Для этого достаточно показать, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$, моментов времени t_0, T и любого числа $\delta > 0$ существуют хотя бы одно решение $x = x(t)$ системы (2) и хотя бы одна сила $\varphi(t)$, удовлетворяющие условиям, отмеченным в [1], и момент времени $t_* > T$ – такие, что $\|x(t_0)\| < \delta$, $\left\|\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| < \delta$, но $\|x(t_*)\| \ge \varepsilon$.

Пусть $0 < \varepsilon \le h$ – некоторое число. Для любого числа $\delta > 0 (0 < \delta < \beta)$ выбираем точку x_0 так, чтобы $x_0 = \mu a$ $(\mu \in R^1)$ и $\|x_0\| < \delta$.

Рассмотрим то решение $x = x(t)$ системы (2), для которой $x(t_0) = x_0$.

Для доказательства теоремы принимаем

$$\varphi(t) = \lambda a\left[\delta(t - t_0) - \delta(t - t_1)\right], \tag{3}$$

где $t_0 < t_1 \le T; a \in R^n; \lambda \in R^1$.

Очевидно, что $\left\|\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| = 0$. Запишем систему (2) в виде:

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} F(x(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau + x_0. \tag{4}$$

Тогда

$$x(t_0 + 0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+0} F(x(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_0+0} \varphi(\tau)d\tau + x_0 = \lambda a + x_0. \tag{5}$$

Принимая $\lambda = \dfrac{2\|a\|(1 - \mu) - h_1 - \beta}{2\|a\|} > 0$, получим

$$x(t_0 + 0) = \frac{2\|a\| - h_1 - \beta}{2\|a\|} \cdot a = x_1.$$

Следовательно,

$$\|x_1 - a\| = \left|\frac{2\|a\| - h_1 - \beta}{2\|a\|} - 1\right| \cdot \|a\| = \left|-\frac{h_1 + \beta}{2}\right| = \frac{h_1}{2} + \frac{\beta}{2} < \frac{h_1}{2} + \beta. \tag{6}$$

Таким образом, фазовая точка, начиная с момента t_0+0, будет принадлежать области $\|x_1-a\|<\frac{h_1}{2}+\beta$, где, согласно условиям теоремы, функция $V(x)$ принимает положительные значения, а ее производная удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x)\geq\alpha>0. \tag{7}$$

Покажем, что существует момент времени $t_1\leq T$ такой, что фазовая точка, не покидая область D, будет удовлетворять условию

$$\|x(t_1-0)\|=\|a\|+\frac{h_1}{2}+\frac{\beta}{2}. \tag{8}$$

Согласно 2) условию теоремы имеем $\dot{V}(x)\geq\alpha>0$ при $x(t)\in D$, следовательно, $V(x(t))\geq V(x(t_0+0))=V(x_1)=V_1>0$ для всех $t\geq t_0$, если только $V(x(t))>0$ (функция $V(x)$ может и не быть положительной, если решение $x=x(t)$ покидает область D, но это невозможно, так как согласно условию 3) теоремы на границе D $V(x)=0$).

Обозначим

$$V_2=\inf_{\substack{\|x\|=\|a\|+\frac{h_1+\beta}{2}\\ x\in D}} V(x)>0$$

и выберем $\alpha=\dfrac{V_2-V_1}{T-t_0}$. Тогда из неравенства (7) будем иметь

$$V(x(t))\geq V_1+\alpha(t-t_0) \text{ и } V(x(T))\geq V_1+\alpha(T-t_0)=V_1+\frac{V_2-V_1}{(T-t_0)}(T-t_0)=V_2,$$

откуда следует, что решение $x=x(t)$, не покидая область D в момент времени $t=T$, вышло из шара $\|x\|<\|a\|+\dfrac{h_1+\beta}{2}$, т. е. существует момент времени $t_1\leq T$ такой, что $\|x(t_1-0)\|=\|a\|+\dfrac{h_1+\beta}{2}$.

Считаем значение решения $x=x(t)$ в точке t_1+0:

$$x(t_1+0)=\int_{t_0}^{t_1+0}F(x(\tau))d\tau+\lambda a\int_{t_0}^{t_1+0}[\delta(\tau-t_0)-\delta(\tau-t_1)]d\tau+x_0=$$

$$=x(t_1-0)-\lambda a=x(T).$$

Тогда

$$\|x(T)\|=\|x(t_1-0)-\lambda a\|\geq\|x(t_1-0)\|-|\lambda|\cdot\|a\|=\|a\|+\frac{h_1}{2}+\frac{\beta}{2}-$$

$$-\|a\|\cdot(1-\mu)+\frac{h_1}{2}+\frac{\beta}{2}=h_1+\beta+\|a\|\cdot\mu>h_1>h\geq\varepsilon,$$

так как $\beta+\|a\|\mu>0$.

Следовательно, существует момент $t_*>T$ такой, что $\|x(t_*)\|\geq\varepsilon$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что в общем случае, если решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то оно может стать неустойчивым по действующей силе.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96 - 862, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Кафедра теоретической механики *Поступила 13.02.1998*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С., Шагинян С. Г.** О построении функции Ляпунова. – Уч. запис. ЕГУ, 1987, № 1, с. 39-45.

Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ս.Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է ըստ Լյապունովի ասիմպտոտիկ կայուն ոչ գծային, ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի անկայունության խնդիրը:

Ցույց է տրված, որ որոշ բավարար պայմանների դեպքում այդպիսի համակարգերի զրոյական լուծումը կարող է դառնալ անկայուն ըստ ազդող ուժի: Ձևակերպված և ապացուցված է մեկ թեորեմ: