ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1998 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

М.С. ГАБРИЕЛЯН, С.Г. ШАГИНЯН, С.Р. АМБАРЦУМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Требование устойчивости движения по Ляпунову является одним из наиболее важных условий в динамике ракет.

Получается интересный и более надежный результат, если требовать устойчивость по действующей силе.

§1. Динамические уравнения движения ракеты в векторном виде имеют следующий вид [1] (стр.36):

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d\overline{V}_c}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{V}_c\right)=\overline{G}+\overline{P}+\overline{R}_A+\overline{F}_k+\overline{F}_r+\overline{F}_{упр}\,, \\ \bar{I}\cdot\dfrac{d\overline{\omega}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{L}^S=\overline{M}_p+\overline{M}_A+\overline{M}_k+\overline{M}_{упр}\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

где m - масса ракеты, $\overline{V}_c$ - вектор скорости центра масс ракеты, $\overline{\omega}$ - вектор угловой скорости корпуса ракеты, $\bar{I}$ - момент инерции, $\overline{G}=m\bar{g}$ - сила тяжести ракеты, $\overline{P}$ - полная тяга двигателя ракеты, $\overline{M}_p$ - момент тяги двигателя, $\overline{R}_A$ - аэродинамическая сила, $\overline{M}_A$ - момент аэродинамических сил, составленных относительно центра масс ракеты, $\overline{F}_k$ - главный вектор кориолисовой силы, когда течение газов и жидкостей внутри корпуса ракеты обладает осевой симметрией, $\overline{M}_k$ - главный момент кориолисовой силы, $\overline{F}_r$ - сила, обусловленная перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса, когда течение газов и жидкостей в корпусе ракеты осесимметрично, $\overline{F}_{упр}$ - сила, возникающая при отклонении органов управления от нейтрального положения, приложенная в центре масс ракеты, $\overline{M}_{упр}$ - момент, возникающий при отклонении органов управления от нейтрального положения, $\overline{L}^S$ - кинетический момент.

Пренебрегая всеми факторами, которые либо мало влияют на траекторию движения центра масс, либо по своей природе носят случайный характер и не могут быть учтены, для системы линеаризованных уравнений возмущенного движения уравнений (1.1) получим [1] (стр.53)

$$
\begin{cases}
m\dfrac{d\Delta V_x}{dt}+C_{xx}\Delta V_x-mg_y\Delta\theta=C_{x\delta}\Delta\delta_x+\Delta F_x,\\
m\dfrac{d\Delta V_y}{dt}+v_y\dfrac{d\Delta\theta}{dt}+C_{yy}\Delta V_y+C_{y\theta}\Delta\theta=C_{y\delta}\Delta\delta_\theta+\Delta F_y,\\
m\dfrac{d\Delta V_z}{dt}+v_z\dfrac{d\Delta\psi}{dt}+C_{zz}\Delta V_z+C_{z\psi}\Delta\psi+mg_y\Delta\gamma=C_{z\delta}\Delta\delta_\psi+\Delta F_z,\\
I_x\cdot\dfrac{d^2\Delta\gamma}{dt^2}+\mu_x\dfrac{d\Delta\gamma}{dt}=C_{\gamma\delta}\Delta\delta_\gamma+\Delta M_x,\\
I_y\cdot\dfrac{d^2\Delta\psi}{dt^2}+\mu_y\dfrac{d\Delta\psi}{dt}+C_{\psi z}\Delta V_z+C_{\psi\psi}\Delta\psi=C_{\psi\delta}\Delta\delta_\psi+\Delta M_y,\\
I_z\cdot\dfrac{d^2\Delta\theta}{dt^2}+\mu_z\dfrac{d\Delta\theta}{dt}+C_{\theta y}\Delta V_y+C_{\theta\theta}\Delta\theta=C_{\theta\delta}\Delta\delta_\theta+\Delta M_z,
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

где $C_{xx}=C_{xo_a}\rho SV_{Cx}$, $C_{yy}=\frac{1}{2}\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}$, $C_{y\theta}=-\left(P+\frac{1}{2}C^{\alpha}_{y_a}\rho SV^2_{Cx}\right)$

$C_{\theta y}=\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}$, $C_{\theta\theta}=-\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV^2_{Cx}$, $C_{zz}=\frac{1}{2}\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}$,

$C_{z\psi}=P+\frac{1}{2}C^{\alpha}_{y_a}\rho SV^2_{Cx}$; $C_{\psi z}=-\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}$, $C_{\psi\psi}=-\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV^2_{Cx}$,

$\Delta F_x=-\frac{\Delta m}{m}\left(P-\frac{1}{2}C_{xo_a}\rho SV^2_{Cx}\right)+\Delta P+C_{xo_a}\rho SV_{Cx}W_{Bx}-\frac{1}{2}C_{xo_a}\Delta\rho SV^2_{Cx}-\frac{1}{2}\rho SV^2_{Cx}\Delta C_{xo_a}$

- осевая возмущающая сила, $\Delta F_y=\Delta mg_y+\sum_j\eta_jP_j+\frac{1}{2}\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV_{Cx}W_{By}$

- возмущающая сила в направлении оси OY, $\Delta F_z=\frac{1}{2}\left(C_{xa}+C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV_{Cx}W_{Bz}+\sum_j\xi_jP_j$

- возмущающая сила в направлении оси OZ, $\Delta M_x=\sum_j\left(y_j\xi_j-z_j\eta_j\right)P_j$ - проекция момента возмущающих сил на ось OX, $\Delta M_y=-\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}W_{Bz}+$
$+\sum_j\left(z_j-x_j\xi_j\right)P_j$ - проекция возмущающего момента на ось OY,

$\Delta M_z=\frac{1}{2}x_F\left(C_{xo_a}+C^{\alpha}_{y_a}\right)\rho SV_{Cx}W_{By}+\sum_j\left(x_j\eta_j-y_j\right)P_j-I_z\frac{d^2\theta}{dt^2}-\mu_z\frac{d\theta}{dt}$ - проекция возмущающего момента на ось OZ, остальные величины имеют обозначения, приведенные в [1].

§2. Свободное возмущенное движение ракеты по тангажу, рысканию и крену описывается системой уравнений (1.2) при нулевых правых частях. Тогда, если обозначить: $x_1=\Delta V_x$, $x_2=\Delta V_y$, $x_3=\Delta\theta$, $x_4=\Delta\dot\theta$, $x_5=\Delta V_z$, $x_6=\Delta\gamma$, $x_7=\Delta\dot\gamma$, $x_8=\Delta\psi$, $x_9=\Delta\dot\psi$, система (1.2) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_{11}x_1 + P_{13}x_3, \\ \dot{x}_2 = P_{22}x_2 + P_{23}x_3 + P_{24}x_4, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = P_{42}x_2 + P_{43}x_3 + P_{44}x_4, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = P_{55}x_5 + P_{56}x_6 + P_{58}x_8 + P_{59}x_9, \\ \dot{x}_6 = x_7, \\ \dot{x}_7 = P_{77}x_7, \\ \dot{x}_8 = x_9, \\ \dot{x}_9 = P_{95}x_5 + P_{98}x_8 + P_{99}x_9, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $P_{11} = -\dfrac{C_{xx}}{m} = -\dfrac{1}{m}C_{x0a}\rho SV_{Cx}$, $P_{13} = g_y$, $P_{22} = -\dfrac{C_{yy}}{m} = -\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{2}\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV_{Cx}$,

$$P_{23} = -\frac{C_{y\theta}}{m} = \frac{1}{m}\left(P + \frac{1}{2}C^{\alpha}_{ya}\rho SV^2_{Cx}\right),\ P_{24} = -\frac{V_y}{m},$$

$$P_{42} = -\frac{C_{\theta}}{I_z} = -\frac{1}{I_z}\frac{1}{2}x_F\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV^2_{Cx},$$

$$P_{43} = -\frac{C_{\theta\theta}}{I_z} = \frac{1}{I_z}\frac{1}{2}x_F\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV^2_{Cx},\ P_{44} = -\frac{\mu_z}{I_z},$$

$$P_{55} = -\frac{C_{zz}}{m} = -\frac{1}{m}\frac{1}{2}\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV_{Cx},$$

$$P_{56} = -g_y,\ P_{58} = -\frac{1}{m}\left(P + \frac{1}{2}C^{\alpha}_{ya}\rho SV^2_{Cx}\right),\ P_{59} = -\frac{V_z}{m},\ P_{77} = -\frac{\mu_x}{I_x},$$

$$P_{95} = -\frac{C_{\psi z}}{I_y} = \frac{1}{I_y}\frac{1}{2}x_F\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV_{Cx};$$

$$P_{98} = -\frac{C_{\psi\psi}}{I_y} = \frac{1}{I_y}\frac{1}{2}x_F\left(C_{x0a} + C^{\alpha}_{ya}\right)\rho SV^2_{Cx},\ P_{99} = -\frac{\mu_y}{I_y}.$$

Известно, что в зависимости от корней характеристического уравнения систем (2.1) и (2.2) тривиальное решение может быть устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по Ляпунову [2] (стр.57).

Попытаемся получить условия, при которых тривиальное решение систем (2.1), (2.2) будет устойчивым (или неустойчивым) по действующей силе [3].

Целесообразно отдельно исследовать вопросы устойчивости по действующей силе системы (2.1), а затем для системы (2.2).

1. Характеристическое уравнение системы (2.1) будет

$$\begin{vmatrix} P_{11} - \lambda & 0 & P_{13} & 0 \\ 0 & P_{22} - \lambda & P_{23} & P_{24} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & P_{42} & P_{43} & P_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Корнями характеристического уравнения (2.3) будут $\lambda_1 = P_{11} < 0$ и решения уравнения

$$\lambda^3 + (-P_{22} - P_{44})\lambda^2 + (P_{22}P_{44} - P_{24}P_{42} - P_{43})\lambda + P_{22}P_{43} - P_{23}P_{42} = 0. \tag{2.4}$$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

а) если выполняются условия

$$P_{11} < 0,\ P_{22} + P_{44} < 0,$$
$$-(P_{22} + P_{44})(P_{22}P_{44} - P_{24}P_{42} - P_{43}) - (P_{22}P_{43} - P_{23}P_{42}) > 0,\ P_{22}P_{43} - P_{23}P_{42} > 0, \tag{2.5}$$

то система (2.1) будет устойчивой по действующей силе [4];

б) если

$$P_{11} < 0,\ P_{22}P_{43} - P_{23}P_{42} = 0,\ P_{22} + P_{44} < 0,\ P_{22}P_{44} - P_{24}P_{42} - P_{43} > 0, \tag{2.6}$$

то система (2.1) будет устойчивой по действующей силе [4];

в) система (2.1) при двух нулевых корнях будет неустойчивой по действующей силе [4], так как $P_{22} \neq 0$;

г) система (2.1) при действительной задаче для трех нулевых корней будет неустойчивой по действующей силе [4], так как $P_{11} \neq 0$.

В остальных случаях, когда не выполняется хотя бы одно из условий (2.5) и (2.6), система (2.1) будет неустойчивой по действующей силе [4].

2. Рассмотрим систему (2.2). Составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} P_{55}-\lambda & P_{56} & 0 & P_{58} & P_{59} \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{77}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ P_{95} & 0 & 0 & P_{98} & P_{99-\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.7}$$

корнями которого будут $\lambda_5 = 0, \lambda_6 = P_{77} < 0$ и решения следующего уравнения третьего порядка:

$$\lambda^3 + (-P_{55} - P_{99})\lambda^2 + (P_{55}P_{99} - P_{59}P_{95} - P_{98})\lambda + P_{55}P_{98} - P_{58}P_{95} = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) если выполняются условия

$$P_{77} < 0;\ P_{55} + P_{99} < 0,$$
$$-(P_{55} + P_{99})(P_{55}P_{99} - P_{59}P_{95} - P_{98}) - (P_{55}P_{98} - P_{58}P_{95}) > 0,\ P_{55}P_{98} - P_{58}P_{95} > 0, \tag{2.9}$$

то система (2.2) будет устойчивой по действующей силе [4];

б) если выполняются условия

$$P_{77} < 0;\ P_{55}P_{98} - P_{58}P_{95} = 0,\ P_{55} + P_{99} < 0,$$
$$P_{55}P_{99} - P_{59}P_{95} - P_{98} > 0,\ P_{56}P_{95} = 0, P_{56}P_{98} = 0, \tag{2.10}$$

то система (2.2) будет устойчивой по действующей силе [4];

в) система (2.2) при условиях

$$P_{77} < 0; P_{56} = 0; P_{58} = 0,\ P_{98} = 0; P_{55} + P_{99} < 0, P_{55}P_{99} - P_{59}P_{95} = 0$$

будет неустойчивой по действущей силе [4], так как $P_{58} \neq 0$;

г) при условиях

$$P_{77} < 0,\ P_{55}P_{98} - P_{58}P_{95} = 0,\ P_{55}P_{99} - P_{59}P_{95} - P_{98} = 0,\ P_{55} + P_{99} = 0$$

система (2.2) будет неустойчивой по действущей силе [4].

В остальных случаях тривиальное решение системы (2.2) неустойчиво по действующей силе.

Так как движение системы описывается системой дифференциальных уравнений (1.2), которая распадается на две независимые системы (2.1) и (2.2), то тривиальное решение систем (2.1), (2.2) устойчиво по действущей силе при следующих случаях:

1) (2.5) и (2.9),
2) (2.5) и (2.10),
3) (2.6) и (2.9),
4) (2.6) и (2.10).

А при всех остальных случаях тривиальное решение систем (2.1), (2.2) неустойчиво по действущей силе.

§3. Рассмотрим нелинейную систему (1.1) движения ракеты. Для простоты вычислений, разлагая в ряд по малым переменным правые части уравнений (1.1) и оставляя члены до третьего порядка малости, получим

$$\dot{x}_1 = P_{11}x_1 + P_{13}x_3 + \frac{P_{11}}{2V_{cx}}x_1^2 + \left(\frac{P_{11}}{2} - P_{22}\right)x_2x_3 + \left(\frac{P_{11}}{2V_{cx}} - \frac{P_{22}}{V_{cx}}\right)x_1x_2x_3 -$$
$$-\left(\frac{P_{23}}{2} + \frac{P_{11}V_{cx}}{4} + \frac{P_{11}}{4} - \frac{P_{22}}{2}\right)x_3^2 + \left(2P_{22} - \frac{3}{2}P_{11}\right)x_1x_3^2 - \frac{1}{2}P_{13}x_3^3 + P_{56}x_3x_6^2 -$$
$$-\left(\frac{P_{11}}{2} - P_{55}\right)x_5x_8 - \left(\frac{P_{11}}{2V_{cx}} - \frac{P_{55}}{V_{cx}}\right)x_1x_5x_8 + P_{56}x_6x_8 + 2x_2x_7x_8 - 2V_{cx}\,x_3x_7x_8 -$$
$$-\left(\frac{P_{23}}{2} + \frac{P_{11}V_{cx}}{4} + \frac{P_{11}}{4} - \frac{P_{22}}{2}\right)x_8^2 + \left(2P_{22} - \frac{3}{2}P_{11}\right)x_1x_8^2 - \frac{1}{2}P_{13}x_3x_8^2 - P_{24}x_3x_4 +$$
$$+ P_{59}x_8x_9 + (P_{24} + P_{59})x_4x_6x_8 + (P_{24} + P_{59})x_3x_6x_9,$$

$$\dot{x}_2 = P_{22}x_2 + P_{23}x_3 + P_{24}x_4 + \frac{P_{22}}{V_{cx}}x_1x_2 + (P_{11} - 2P_{22})x_1x_3 + \left(\frac{P_{11}}{2V_{cx}} - \frac{P_{22}}{V_{cx}}\right)x_1^2x_3 +$$
$$+\frac{P_{22}}{V_{cx}}x_2^2x_3 + P_{13}x_3^2 + \left(P_{11} - \frac{5}{2}P_{22}\right)x_2x_3^2 + \left(P_{22}V_{cx} - \frac{P_{11}}{2}V_{cx} - \frac{P_{23}}{6}\right)x_3^3 - P_{56}x_6^2 -$$
$$-2x_2x_6x_7 + 2V_{cx}\,x_3x_6x_7 - \frac{P_{22}}{V_{cx}}x_2x_5x_8 - (P_{11} - 2P_{22})x_3x_5x_8 + P_{56}x_3x_6x_8 -$$
$$-\frac{P_{22}}{2V_{cx}}x_2x_8^2 + \left(P_{22} - \frac{P_{11}}{2} - \frac{P_{23}}{2}\right)x_3x_8^2 - \frac{P_{24}}{2}x_3^2x_4 - \frac{P_{24}}{2}x_4x_8^2 + P_{59}x_3x_8x_9 -$$
$$-(P_{24} + P_{59})x_4x_6^2 - (P_{24} + P_{59})x_6x_9,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = P_{42}x_2 + P_{43}x_3 + P_{44}x_4 + \frac{P_{42}}{V_{cx}}x_1x_2 - 2P_{42}x_1x_3 - \frac{P_{42}}{V_{cx}}x_1^2x_3 + \frac{P_{42}}{V_{cx}}x_2^2x_3 -$$
$$-2P_{42}x_2x_3^2 - \frac{2}{3}P_{43}x_3^3 + (P_{95} + P_{42})x_5x_6 + \left(\frac{P_{95}}{V_{cx}} + \frac{P_{42}}{V_{cx}}\right)x_1x_5x_8 -$$
$$-(P_{95} + P_{42})x_2x_6^2 + (P_{98} - P_{43})x_3x_6^2 - \frac{P_{42}}{V_{cx}}x_2x_5x_8 + P_{42}x_3x_5x_8 + \tag{3.1}$$
$$+(P_{98} - P_{43})x_6x_8 + 2(P_{95} + P_{42})x_1x_6x_8 + \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} - \frac{I_x - I_z}{I_y}\right)x_4x_6x_7 +$$
$$+\left(1 + \frac{I_x - I_y}{I_z}\right)x_7x_9 + \left(1 - \frac{I_x - I_y}{I_z}\right)x_4x_8x_9 + (P_{99} - P_{44})x_4x_6^2 + (P_{99} - P_{44})x_6x_9,$$

$$\dot{x}_5 = P_{55}x_5 + P_{56}x_6 + P_{58}x_8 + P_{59}x_9 + \frac{P_{55}}{V_{Cx}}x_1x_5 + \frac{P_{55}}{V_{Cx}}x_2x_3x_5 - \frac{P_{55}}{2}x_3^2x_5 - \frac{1}{2}P_{56}x_6^3 +$$

$$+ 2x_2x_7 - 2V_{Cx}x_3x_7 - 2x_1x_3x_7 + 2x_5x_6x_7 - (P_{11} - 2P_{22})x_1x_8 - \left(\frac{P_{11}}{2V_{Cx}} - \frac{P_{22}}{V_{Cx}}\right)x_1^2x_8 -$$

$$- P_{13}x_3x_8 - (P_{11} - 2P_{22})x_2x_3x_8 + \left(\frac{P_{11}}{2} - P_{22}\right)V_{Cx}x_3^2x_8 - \frac{P_{55}}{V_{Cx}}x_5^2x_8 + 2V_{Cx}x_6x_7x_8 +$$

$$+ \left(P_{11} - \frac{5}{2}P_{55}\right)x_5x_8^2 - \frac{P_{56}}{2}x_6x_8^2 + \left(\frac{P_{23}}{2} + \frac{P_{11}}{2} - P_{55}\right)x_8^3 - \frac{P_{59}}{2}x_8^2x_9 +$$

$$+ (P_{24} + P_{59})x_4x_6 - (P_{24} + P_{59})x_6^2x_9,$$

$$\dot{x}_6 = x_7,$$

$$\dot{x}_7 = P_{77}x_7 + P_{42}x_2x_8 + \frac{P_{42}}{V_{Cx}}x_1x_2x_8 + P_{43}x_3x_8 - 2P_{42}x_1x_3x_8 + (P_{95} + P_{42})x_5x_6x_8 +$$

$$+ (P_{98} + P_{43})x_6x_8^2 + (P_{44} - P_{77})x_4x_8 + (P_{99} - P_{44})x_6x_8x_9 +$$

$$+ \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right)x_4^2x_6 + \left(1 + \frac{I_y - I_z}{I_x}\right)x_4x_9 + \left(1 + \frac{I_x - I_y}{I_z}\right)x_7x_8x_9 - \frac{I_y - I_z}{I_x}x_6x_9^2,$$

$$\dot{x}_8 = x_9,$$

$$\dot{x}_9 = P_{95}x_5 + P_{98}x_8 + P_{99}x_9 + \frac{P_{95}}{V_{Cx}}x_1x_5 + \frac{P_{95}}{V_{Cx}}x_2x_3x_5 - \frac{P_{95}}{2}x_3^2x_5 - (P_{95} + P_{42})x_2x_6 -$$

$$- \left(\frac{P_{95}}{V_{Cx}} + \frac{P_{42}}{V_{Cx}}\right)x_1x_2x_6 + (P_{98} - P_{43})x_3x_6 + (P_{95} + P_{42})x_1x_3x_6 - (P_{95} + P_{42})x_5x_6^2 +$$

$$+ 2P_{95}x_1x_8 + \frac{P_{95}}{V_{Cx}}x_1^2x_8 + 2P_{95}x_2x_3x_8 - P_{98}x_3^2x_8 - \frac{P_{95}}{V_{Cx}}x_5^2x_8 - (P_{98} - P_{43})x_6^2x_8 -$$

$$- 2P_{95}x_5x_8^2 - \frac{2}{3}P_{98}x_8^3 + (P_{44} - P_{99})x_6^2x_9 + (P_{99} - P_{44})x_4x_6 + \left(-1 - \frac{I_x - I_z}{I_y}\right)x_4x_7 +$$

$$+ \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)x_4^2x_8 + \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} - \frac{I_x - I_y}{I_z}\right)x_6x_7x_9.$$

Попытаемся получить достаточные условия, при которых тривиальное решение системы (3.1) будет устойчивым по действующей силе. Для простоты исследования сделаем следующие предположения, которые частично приведены в [1].

Предположим, что

1) $x_F = 0$ (аэродинамический фокус совпадает с центром масс ракеты),

2) $x_3 = x_4 = 0$ $(\Delta\theta = \Delta\dot{\theta} = 0)$, (3.2)

3) $x_8 = x_9 = 0$ $(\Delta\psi = \Delta\dot{\psi} = 0)$.

При этих предположениях получается: $P_{42} = P_{43} = P_{95} = P_{98} = 0$.

Тогда система (3.1) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_{11}x_1 + \dfrac{P_{11}}{2V_{Cx}}x_1^2, \\ \dot{x}_2 = P_{22}x_2 + \dfrac{P_{22}}{V_{Cx}}x_1x_2 - P_{56}x_6^2 - 2x_2x_6x_7, \\ \dot{x}_5 = P_{55}x_5 + P_{56}x_6 + \dfrac{P_{55}}{V_{Cx}}x_1x_5 - \dfrac{P_{56}}{2}x_6^3 + 2x_2x_7 + 2x_5x_6x_7, \\ \dot{x}_6 = x_7, \\ \dot{x}_7 = P_{77}x_7. \end{cases} \tag{3.3}$$

С помощью преобразования

$$\begin{cases} y_1 = -P_{77}x_6 + x_7, \\ y_2 = x_1, \\ y_3 = x_2, \\ y_4 = x_7, \\ y_5 = P_{55}x_5 + P_{56}x_6 + \dfrac{P_{56}}{P_{55} - P_{77}}x_7 \end{cases}$$

система (3.3) приводится к виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = P_{11}y_2 + \dfrac{P_{11}}{2V_{Cx}}y_2^2, \\ \dot{y}_3 = P_{22}y_3 + \dfrac{P_{22}}{V_{Cx}}y_2y_3 - \dfrac{P_{56}}{P_{77}^2}y_1^2 + \dfrac{2P_{56}}{P_{77}^2}y_1y_4 - \dfrac{P_{56}}{P_{77}^2}y_4^2 + \dfrac{2}{P_{77}}y_1y_3y_4 - \dfrac{2}{P_{77}}y_3y_4^2, \\ \dot{y}_4 = P_{77}y_4, \\ \dot{y}_5 = P_{55}y_5 + \dfrac{P_{55}P_{56}}{P_{77}V_{Cx}}y_1y_2 - \dfrac{P_{55}^2P_{56}}{P_{77}V_{Cx}(P_{55} - P_{77})}y_2y_4 + \dfrac{P_{55}}{V_{Cx}}y_2y_5 + \dfrac{P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}y_1^3 - \\ \quad -\left(\dfrac{2P_{56}}{P_{77}^2} + \dfrac{3P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}\right)y_1^2y_4 + \left(\dfrac{2P_{56}}{P_{77}^2} + \dfrac{3P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3} + \dfrac{2P_{55}P_{56}}{P_{77}^2(P_{55} - P_{77})}\right)y_1y_4^2 - \\ \quad -\left(\dfrac{P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3} + \dfrac{2P_{55}P_{56}}{P_{77}^2(P_{55} - P_{77})}\right)y_4^3 + 2P_{55}y_3y_4 - \dfrac{2}{P_{77}}y_1y_4y_5 + \dfrac{2}{P_{77}}y_4^2y_5. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если для линейного приближения системы (3.4) искать функцию Ляпунова в виде

$$V(y_2, y_3, y_4, y_5) = \frac{1}{2}\left(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2\right),$$

то производная функции $V(y_2, y_3, y_4, y_5)$ в силу системы (3.4) будет

$$\dot{V}\Big|_{(3.4)} = P_{11}y_2^2 + P_{22}y_3^2 + P_{77}y_4^2 + P_{55}y_5^2 + \frac{P_{11}}{2V_{Cx}}y_2^3 + \frac{P_{22}}{V_{Cx}}y_2y_3^2 - \frac{P_{56}}{P_{77}^2}y_1^2y_3 +$$

$$+\frac{2P_{56}}{P_{77}^2}y_1y_3y_4 - \frac{P_{56}}{P_{77}^2}y_3y_4^2 + \frac{P_{55}P_{56}}{P_{77}V_{Cx}}y_1y_2y_5 - \frac{P_{55}^2P_{56}}{P_{77}V_{Cx}(P_{55} - P_{77})}y_2y_4y_5 +$$

$$+\frac{P_{55}}{V_{Cx}}y_2y_5^2+\frac{P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}y_1^3y_5-\left(\frac{2P_{56}}{P_{77}^2}+\frac{3P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}\right)y_1^2y_4y_5+$$

$$+\left(\frac{2P_{56}}{P_{77}^2}+\frac{3P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}+\frac{2P_{55}P_{56}}{P_{77}^2(P_{55}-P_{77})}\right)y_1y_4^2y_5-\left(\frac{P_{55}P_{56}}{2P_{77}^3}+\frac{2P_{55}P_{56}}{P_{77}^2(P_{55}-P_{77})}\right)y_4^3y_5+$$

$$+2P_{55}y_3y_4y_5+\frac{2}{P_{77}}y_1y_4\left(y_3^2-y_5^2\right)+\frac{2}{P_{77}}y_4^2\left(y_5^2-y_3^2\right).$$

Функция $P_{11}y_2^2+P_{22}y_3^2+P_{77}y_4^2+P_{55}y_5^2$ является определенно-отрицательной, зависимой от переменных $y_2,\ldots,y_5$. Для применения теоремы 3.1 об устойчивости по действующей силе, доказанной в [5], достаточно требовать, чтобы члены выше второго порядка относительно $y_2,\ldots,y_5$ равномерно по y_1 составляли знакопостоянную функцию отрицательного знака.

Нетрудно проверить, что в подклассе движений $y_3=y_5\left(\Delta V_y=P_{55}\Delta V_z\right)$, $P_{56}=-g_y=0, \rho=0$ функция $\dot{V}\big|_{(3.4)}$ является определенно-отрицательной равномерно по y_1.

Таким образом верно следующее утверждение:

Теорема. Если для системы (3.1) выполнены условия (3.2) и $y_3=y_5$, $P_{56}=\rho=0$, то тривиальное решение системы (3.1) устойчиво по действующей силе.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96 - 862, финансируется из государственных централизованных источников РА.

Кафедра теоретической механики *Поступила 11.02.1998*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абгарян К.А., Калязин Э.Л.** и др. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1990, 464 с.
2. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
3. **Габриелян М.С., Шагинян С.Г.** О построении функции Ляпунова. –Уч. записки ЕГУ, 1987, №1, с. 39-45.
4. **Шагинян С.Г.** Об одной задаче теории устойчивости. –Уч. записки ЕГУ, 1986, №2, с. 39-45.
5. **Шагинян С.Г., Амбарцумян С.Р.** Об устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых корнях.–В сборнике статей: Некоторые вопросы теоретической и прикладной механики, Ер.:, Изд. –во Луйс, 1997, с. 52-57.

Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ս.Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ, Ս.Ռ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ՀՐԹԻՌԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԸՍՏ ԱԶԴՈՂ ՈՒԺԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հրթիռի դինամիկայում կարևոր խնդիր է հանդիսանում ըստ Լյապունովի շարժման կայունության ապահովումը:

Հետաքրքիր և ավելի հուսալի արդյունքներ կստացվեն, եթե պահանջենք, որ հրթիռի շարժումը լինի կայուն ըստ ազդող ուժի:

Դիտարկվում է հրթիռի շարժման ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը: Որոշված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում հրթիռի շարժումը գծային մոտավորությամբ կլինի կայուն կամ անկայուն ըստ ազդող ուժի:

Ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում հրթիռի շարժումը ոչ գծային դրվածքով կլինի կայուն ըստ ազդող ուժի: