ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1984 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, А. В. КЕРОПЯН

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ НАКЛАДКАМИ

Рассматривается плоская задача о контактном взаимодействии двух симметрично расположенных полубесконечных накладок малой толщины с полосой, когда на краях накладок действуют горизонтальные сосредоточенные силы.

Решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье сведено к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши относительно деформации промежуточного интервала между накладками. Решение последнего строится с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева. После определения деформации в конечном интервале определяются и контактные напряжения на полубесконечных интервалах через найденные деформации в замкнутом виде.

Пусть упругая бесконечная полоса (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина H) защемлена граной $y=H$ и усилена на своей другой свободной границе с двумя полубесконечными накладками малой толщины h и одинаковыми модулями упругости E_1. Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях накладки (в точках $x=\pm a$) приложены горизонтальные сосредоточенные силы P, которые направлены вдоль положительного направления оси ox в одну сторону.

Здесь, как и в [1, 2], вследствие малости толщины накладки предполагается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется, а под действием только горизонтальных сил она растягивается или сжимается, находясь в одноосном напряженном состоянии. Иначе говоря, считается, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения.

Относительно полосы предполагается, что она находится в условиях плоской деформации.

Согласно вышесказанному уравнения равновесия накладки при указанных условиях будут иметь вид

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{\tau(x)}{E_1h}, \quad -\infty<x<-a,$$
$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{\tau(x)}{E_1h}, \quad a<x<\infty, \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=-a}=\frac{P}{E_1h}, \quad \left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a}=-\frac{P}{E_1h}. \tag{2}$$

В силу (1), (2) уравнения равновесия накладки в обобщенных функциях будут иметь вид [3—7]

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{T(x)}{E_1h}-\frac{P}{E_1h}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]. \tag{3}$$

Здесь

$$U^{(1)}(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]\frac{du^{(1)}}{dx},$$

$$T(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]\tau(x), \tag{4}$$

где

$u^{(1)}(x)$—горизонтальные перемещения точек накладки,

$\tau(x)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений,

$\delta(x)$—дельта-функция Дирака, $\theta(x)$—функция Хевисайда.

Применив к (3) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$-i\sigma\overline{U}^{(1)}(\sigma)=\frac{\overline{T}(\sigma)}{E_1h}-\frac{2P}{E_1h}\cos a\sigma. \tag{5}$$

Здесь

$$\overline{U}^{(1)}(\sigma)=F[U^{(1)}(x)],\quad \overline{T}(\sigma)=F[T(x)],$$

F—оператор преобразования Фурье.

С другой стороны, горизонтальные перемещения граничных точек полосы, когда на ее свободной границе действуют тангенциальные напряжения интенсивности $T(x)$, будут определяться формулой [5, 6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x-s)T(s)ds=G_u(x)+\mu U^{(2)}(x), \tag{6}$$

где

$$K_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K}_n(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

$$\overline{K}_n(\sigma)=\frac{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\operatorname{sh}2H|\sigma|+2\varkappa H|\sigma|]}{2|\sigma|[2\varkappa(\varkappa+1)\operatorname{ch}2H\sigma+\varkappa^2(4H^2\sigma^2+1)+(\varkappa+1)^2]}, \tag{7}$$

$$G_u(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]g_u(x),\quad g_u(x)=\mu u^{(2)}(x),\quad |x|<a,$$

$$U^{(2)}(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]u^{(2)}(x),\quad \varkappa=(\lambda+\mu)/2\mu,$$

λ, μ—упругие постоянные Ламе материала полосы.

Применив к (6) преобразование Фурье, будем иметь

$$\overline{K}_n(\sigma)\overline{T}(\sigma)=\overline{G}_u(\sigma)+\mu\overline{U}^{(2)}(\sigma), \tag{8}$$

где

$$\overline{G}_u(\sigma)=F[G_u(x)],\quad \overline{U}^{(2)}(\sigma)=F[U^{(2)}(x)].$$

Далее, так как вдоль линии соединения накладки с полосой имеет место условие

$$u^{(1)}(x)=u^{(2)}(x,\ 0),\quad |x|>a, \tag{9}$$

на основании (5), (8), (9) получим следующее функциональное уравнение:

$$[\lambda_1+\sigma^2\overline{K}_n(\sigma)]\cdot\overline{T}(\sigma)=\sigma^2\overline{G}_u(\sigma)+2\lambda_1 P\cos a\sigma. \tag{10}$$

Разрешив (10) относительно $\overline{T}(\sigma)$ в силу (7), после обратного преобразования **Фурье получим**

$$T(x)=A\int_{-\infty}^{\infty}K(x-s)G_u^*(s)ds+2\lambda^* PM(x), \tag{11}$$

где

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{r}(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma,$$

$$M(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos a\sigma}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma x}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{m}(\sigma)e^{-i\sigma x}\,d\sigma,$$

$$\overline{G}_u^*(\sigma)=-i\sigma\overline{G}_u(\sigma),\quad A=\frac{4\varkappa}{2\varkappa+1},\quad \lambda^*=A\lambda_1,\quad \lambda_1=\frac{\mu}{E_1 h}.$$

Отметим, что $K(x)$ можно представить и таким образом:

$$K(x)=\frac{1}{\pi x}-\frac{\lambda^*}{2}\operatorname{sgn}x+\lambda^*[R(x)+r(x)]. \tag{12}$$

Здесь

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{(\lambda^* x)^{2n-1}}{\pi(2n-1)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda^* x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n-1}-C\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda^* x)^{2n}\operatorname{sgn}x}{2(2n)!}\right\},$$

$r(x)=F^{-1}[\overline{r}(\sigma)]$, C—постоянная Эйлера.

Здесь следует отметить, что ядро $K(x)$ представлено в виде суммы своих сингулярных и регулярных частей, где функции, характеризующие регулярные части, имеют суммируемую квадратом производную на отрезке $[-1, 1]$.

С другой стороны, поскольку при $|x|<a$ $T(x)=0$, в силу (12) получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{g_u^*(s)}{s-x}ds+\frac{\lambda^*}{2}\int_{-a}^{a}\operatorname{sgn}(x-s)g_u^*(s)ds-\lambda^*\int_{-a}^{a}\overline{R}(x-s)g_u^*(s)ds=$$
$$=\frac{2P\lambda_1}{\mu}M(x)\qquad |x|<a. \tag{13}$$

Здесь

$$g_u^*(x)=\frac{du^{(2)}}{dx},\ |x|<a,\quad \overline{R}(x)=R(x)+r(x).$$

Очевидно, что имеет место условие

$$\int_{-a}^{a} g_u^*(x)dx=0. \tag{14}$$

После решения сингулярного интегрального уравнения (13) при условии (14) $\tau(x)$ будет определяться формулой

$$\tau(x)=-\frac{\mu A}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{g_u^*(s)}{s-x}ds+\mu A\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}(x-s)g_u^*(s)ds+$$
$$+2\lambda^* PM(x), \quad |x|>a. \tag{15}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (13) при условии (14). Представим (13) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds+\frac{\lambda_*}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x-s)\varphi(s)ds-\lambda_*\int_{-1}^{1}R^*(x-s)\varphi(s)ds=$$
$$=\Psi(x). \quad |x|<1. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi(x)=g_u^*(ax), \quad \psi(x)=\frac{2P\lambda_1}{\mu}M(ax), \quad R^*(x)=\bar{R}(ax), \quad \lambda_*=a\lambda^*.$$

Очевидно, что условие (14) будет иметь вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=0. \tag{17}$$

Следуя работам [8—9], решение уравнения (16) ищем в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n(x), \tag{18}$$
$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \quad |x|<1, \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $T_n(x)$—многочлены Чебышева первого рода.

Подставляя (18) в (16) и пользуясь соотношениями [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(s)ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}=U_{n-1}(x), \quad U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)U_{m-1}(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n,\end{cases} \quad (m,\ n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $U_{k-1}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$—многочлены Чебышева второго рода, после некоторых элементарных операций для определения неизвестных коэффициентов X_n получим бесконечную систему линейных уравнений

$$X_0=0,$$
$$X_m+\lambda_*\sum_{n=1}^{\infty}(K_{m,n}+R_{m,n})X_n=f_m \quad (m=1,\ 2,\ \ldots). \tag{19}$$

Здесь введены обозначения

$$K_{m,n}=\begin{cases}-\dfrac{4m[1+(-1)^{n-m}]}{\pi[n^2-(m-1)^2][n^2-(m+1)^2]}, & n\neq m\pm 1,\\ 0, \quad n=m\pm 1,\end{cases}$$

$$R_{m,n}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}R^*(x-s)\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\sqrt{1-x^2}U_{m-1}(x)dx,$$

$$f_m=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)\Psi(x)dx \quad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Далее традиционным способом [3, 8—9] доказывается квазиполная регулярность бесконечной системы (19). После того, как построено решение уравнения (16) в виде (18), контактные напряжения будут определяться так:

$$\tau(ax)=-\frac{\mu A}{\sqrt{x^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\Bigg\{(-1)^n(x+\sqrt{x^2-1})^{-n}+$$

$$+\lambda_*\sqrt{x^2-1}\int_{-1}^{1}R^*(x-s)\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\Bigg\}+\mu A\Psi(x), \quad x>1.$$

ЕГУ, филиал ВНИИАЭС

Поступила 7.02.1984

ЛИТЕРАТУРА

1. **Melan E.** Ingr.—Archiv, 1932, Bd. 3, Heft 2, s. 123—129..
2. **Buller H.** VDI—Forschungsheft, 1961, v. 485, ser. B., № 27, s. 5—44.
3. **Григорян Э. Х.** Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости.—Уч. записки ЕГУ, 1979, № 2, с. 62—71.
4. **Григорян Э. Х.** Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, 1979, № 3, с. 29—34.
5. **Саркисян В. С., Керопян А. В.** Об одной контактной задаче для упругой полосы с двумя полубесконечными включениями.—Уч. записки ЕГУ, 1981, № 2, с. 40—49.
6. **Саркисян В. С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983, 259 с.
7. **Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 440 с.
8. **Arutunyan N. K., Mchitaryan S. M.** Some contact problems for a semi—plan with elastic stiffeners.—Trends in elasticity and thermoelasticity (W. Novacki Anniversary volume). Groningen Wolters—Noordhoff publ., 1971, p. 3—30.
9. **Морарь Г. А., Попов Г. Я.** К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.—ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 412—422.
10. **Градштейн И. С. и Рыжик И. М.** Таблицы интгралов, сумм рядов и произведений, М.: Наука, 1971, 1108 с.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է փոքր հաստությամբ երկու միատեսակ կիսանվերջ առաձգական վերադիրներով ուժեղացված առաձգական շերտի կոնտակտային խնդիրը, երբ վերադիրների ծայրերում կիրառված են կենտրոնացված ուժեր։

Կիսանվերջ սիմետրիկ ինտերվալներում անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը հանգեցված է վերադիրների միջև ընկած վերջավոր հատվածում անհայտ դեֆորմացիայի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման։ Վերջինիս լուծումը Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ հանգեցված է կվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման։ Անհայտ դեֆորմացիան որոշելուց հետո կոնտակտային լարումները վերջինիս միջոցով արտահայտվում են փակ տեսքով։