ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1986 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

С. Г. ШАГИНЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

В статье изучаются вопросы устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами, когда на систему на конечном интервале времени действуют интегрально-малые возмущающие силы.

§ 1. Пусть имеем системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = Ay_i + \bar{f}_i(t), \quad (t \geqslant t_0;\ i=1,\ 2), \tag{1.1}$$

где $y_i \in R^n$, A—$n \times n$ матрица, $\bar{f}_i(t): R \to R^n$, причем

$$\bar{f}_i(t) = \begin{cases} f_i(t) & \text{при} \quad t \in [t_0,\ T], \\ 0 & \text{при} \quad t \,\bar{\in}\, [t_0,\ T]. \end{cases}$$

Здесь $T > t_0$—постоянная величина.
Предполагается, что

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \bar{f}_i(t)dt \right\| < \infty, \quad i = 1,\ 2.$$

Сформулируем следующие задачи.

Задача 1.1. Требуется определить условия, наложенные на матрицу А, при которых выполняется следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)}) > 0$ такое, что

$$\| y_1(t) - y_2(t) \| < \varepsilon \text{ при } t \in [T,\ \infty), \text{ если } \| y_1(t_0) - y_2(t_0) \| < \delta \text{ и}$$

$$\left\| \int_{t_0}^{T} [\bar{f}_1(t) - \bar{f}_2(t)]\, dt \right\| < \delta.$$

Задача 1.2. При наличии задачи 1.1 добавочно требуется, чтобы $\| y_1(t) - y_2(t) \| \to 0$ при $t \to \infty$.

Задача 1.3. Требуется определить условия, наложенные на матрицу А, при которых выполняется следующее условие: существуют $\varepsilon > 0$, $t_1 > T$ такие, что для любого $\delta > 0$

$$\| y_1(t_0) - y_2(t_0) \| < \delta, \quad \left\| \int_{t_0}^{T} [\bar{f}_1(t) - \bar{f}_2(t)]\, dt \right\| < \delta,$$

но $$\| y_1(t_1)-y_2(t_1) \| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $x(t),=y_1(t)-y_2(t)$, тогда из (1.1) получим

$$\dot{x}=Ax+\varphi(t) \quad (t>t_0), \tag{1.2}$$

где $\varphi(t)=\bar{f}_1(t)-\bar{f}_2(t)$.

Приведем следующие определения [1].

Определение 1.1. Скажем, что решение $x\equiv 0$ системы $\dot{x}=Ax$ устойчиво по действующей силе при $t\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0)>0$ такое, что

$$\| x(t) \| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \| x(t_0) \| < \delta \quad \text{и} \quad \left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt \right\| < \delta \tag{1.3}$$

при $t \geqslant T$.

В противном случае решение $x\equiv 0$ назовем неустойчивым по действующей силе.

Определение 1.2. Скажем что решение $x\equiv 0$ системы $\dot{x}=Ax$ устойчиво асимптотически по действующей силе, если оно устойчиво по действующей силе и $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\|=0$.

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ корни уравнения

$$|A-\lambda E|=0 \tag{1.4}$$

с кратностями $r_1, \ldots, r_l$ соответственно $\left(\sum\limits_{i=1}^{l} r_i=n\right)$.

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. 1. Если корни уравнения (1.4) удовлетворяют условиям

1) $\lambda_1=0$ (с кратностью r_1; $0\leqslant r_1 \leqslant n$), причем этому корню соответствуют простые элементарные делители;

2) $\operatorname{Re}\lambda_i<0$ при $i=2, \ldots, l$, то система $\dot{x}=Ax$ устойчива по действующей силе.

Доказательство. При помощи неособого линейного преобразования приведем систему (1.2) к виду [2] (стр. 84, 151), [3] (стр. 90):

$$\dot{z}=\psi_1(t), \quad \dot{s}=Bz+Cs+\psi_2(t) \quad (t\geqslant t_0), \tag{1.5}$$

где z, s, B, C—$r\times 1$, $(n-r)\times 1$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(n-r)$ матрицы соответственно, а $\psi_1(t):R\to R^r$; $\psi_2(t):R\to R^{n-r}$ $(t\in[t_0, T])$—функции, удовлетворяющие условию

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \psi_1(t)dt \right\|_{r\times 1} < \delta \quad \text{и} \quad \left\| \int_{t_0}^{T} \psi_2(t)dt \right\|_{(n-r)\times 1} < \delta. \tag{1.6}$$

Здесь $|D|_{k\times m}$—эвклидова норма $k\times m$ матрицы D.

Интегрируя систему (1.5), получим

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \psi_1(\tau)d\tau \\ e^{C(t-t_0)} \cdot s^{(0)} + \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \cdot B \cdot z^{(0)} d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \cdot B \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(\xi)d\xi d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \psi_2(\tau)d\tau \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Здесь $e^{C(t-t_0)}$ —фундаментальная матрица системы $\dot{s} = Cs$. Оценим величину $\left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \right\|_{n\times 1}$ при $t > T$:

$$\left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \right\|_{n\times 1} \leqslant \left\| z^{(0)} + \int_{t_0}^{T} \psi_1(\tau)d\tau \right\|_{r\times 1} + \left\| e^{C(t-t_0)} \cdot s^{(0)} + \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \cdot B \cdot z^{(0)}d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{Ct} \cdot \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau} \cdot B \cdot \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(\xi)d\xi d\tau + e^{Ct} \cdot \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau}\psi_2(\tau)d\tau \right\|_{(n-r)\times 1} \leqslant$$

$$\leqslant \| z^{(0)} \|_{r\times 1} + \left\| \int_{t_0} \psi_1(\tau)d\tau \right\|_{r\times 1} + \| e^{C(t-t_0)} \|_{(n-r)\times(n-r)} \cdot \| s^{(0)} \|_{(n-r)\times 1} +$$

$$+ \left\| \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \cdot B \cdot z^{(0)} \cdot d\tau \right\|_{(n-r)\times 1} + \| e^{Ct} \|_{(n-r)\times(n-r)} \left\| \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau} \cdot B \times \right.$$

$$\left. \times \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(\xi)d\xi d\tau \right\|_{(n-r)\times 1} + \|e^{Ct}\|_{(n-r)\times(n-r)} \left\| \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau}\psi_2(\tau)d\tau \right\|_{(n-r)\times 1} < \delta + \delta +$$

$+M \cdot \delta + L\ \delta + \|e^{Ct}\|_{(n-r)\times(n-r)} \cdot (K+N)$, где $M = \max\limits_{t\in[t_0,\infty)} \| e^{C(t-t_0)} \|_{(n-r)\times(n-r)}$;

$$L = \max_{t\in[t_0,\infty)} \left\| \int_{t_0}^{t} e^{C(t-\tau)} \cdot B \cdot z^{(0)}d\tau \right\|_{(n-r)\times 1}; \quad K = \left\| \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau} \cdot B \cdot \int_{t_0}^{\tau} \psi_1(\xi)d\xi d\tau \right\|_{(n-r)\times 1};$$

$$N = \left\| \int_{t_0}^{T} e^{-C\tau}\psi_2(\tau)d\tau \right\|_{(n-r)\times 1}.$$

Поскольку все корни уравнения $|C - \lambda E| = 0$ имеют отрицательные вещественные части, то $M < \infty$, $L < \infty$ и при любом $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ и $t_* > T$ так, чтобы

$$\| e^{Ct} \|_{(n-r)\times(n-r)} \cdot (K+N) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } t > t_* \text{ и } 2\delta + M \cdot \delta + L \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом $\left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \right\|_{n\times 1} < \varepsilon$ при $t \geqslant t_*$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Если корни уравнения (1.4) удовлетворяют следующим условиям: хотя бы для одного из $\lambda_k (1 \leqslant k \leqslant l)$ $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ или $\lambda_k = 0$ с кратностью $r_k (1 < r_k \leqslant n)$, которому не отвечают простые элементарные делители, или хотя бы один из корней λ_k имеет вид $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_k = \alpha \neq 0$, то система $\dot{x} = Ax$ неустойчива по действующей силе.

Доказательство. В первых двух случаях система $\dot{x} = Ax$ неустойчива по Ляпунову, тогда эта система неустойчива и по действующей силе, так как из определения 1.1 следует, что если система устойчива по действующей силе, то она устойчива и по Ляпунову.

Пусть $\lambda_1 = i\alpha$, $\lambda_2 = -i\alpha$ ($\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 3, 4, \ldots, l$; остальные случаи рассмотрены). В этом случае с помощью неособого линейного преобразования $z = Bx$ ($|B| \neq 0$) систему (1.2) можно привести к виду [2] (стр. 84, 151):

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = -\alpha z_2 + \psi_1(t),\\
&\dot{z}_2 = \alpha z_1 + \psi_2(t),\\
&\dot{z}_i = c_{i1} z_1 + \ldots + c_{in} z_n + \psi_i(t) \quad (i = 3, 4, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Для доказательства теоремы достаточно предположить, что

$$
\begin{Vmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \\ \psi_n(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta(t) - \delta(t - t_*) \\ 0 \\ \\ 0 \end{Vmatrix} \quad (t_0 = 0 < t_* < T) \tag{1.9}
$$

и $\sin \dfrac{\alpha t_*}{2} \neq 0$.

В системе (1.8) первые два уравнения можно интегрировать отдельно:

$$
\begin{cases}
z_1(t) = z_1^{(0)} \cdot \cos\alpha t - z_2^{(0)} \cdot \sin\alpha t - 2\sin\dfrac{\alpha t_*}{2} \cdot \sin\alpha\left(t - \dfrac{t_*}{2}\right),\\[2ex]
z_2(t) = z_1^{(0)} \sin\alpha t + z_2^{(0)} \cos\alpha t + 2\sin\dfrac{\alpha t_*}{2} \cdot \cos\alpha\left(t - \dfrac{t_*}{2}\right).
\end{cases} \tag{1.10}
$$

Здесь $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$ — начальные значения решений $z_1(t)$ и $z_2(t)$.

Из (1.10) видно, что условие (1.3) не выполняется, так как $\sin\dfrac{\alpha t_*}{2}$ отлично от нуля.

Таким образом теорема 1.2 доказана.

Теорема 1.3. Если корни уравнения (1.4) удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, l$, то система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива по действующей силе.

Доказательство. Как известно, при условии $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ($i = 1, \ldots, l$) система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива в целом [4], следовательно, она асимптотически устойчива по действующей силе.

Теорема 1.3 доказана.

Замечание 1.1. Если вещественные части всех корней уравнения (1.4) отрицательны ($\mathrm{Re}\lambda_i<0$, $i=1, \ldots, l$), то теорема 1.1 верна и в случае, когда условие $\left\|\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt\right\|<\delta$ не соблюдается.

Замечание 1.2. Теоремы 1.1—1.3 обратимы.

§ 2. Рассмотрим голономную консервативную стационарную механическую систему с n степенями свободы. Уравнения малых колебаний этой системы около положения равновесия будут

$$A\ddot{q}+Cq=0, \tag{2.1}$$

где A и C—n×n симметричные матрицы (A—положительно-определенная), q—n-мерный вектор-столбец.

Предполагаем, что первые k из обобщенных координат механической системы циклические (k—четное число). Тогда систему (2.1) можно привести к виду [5] (стр. 274):

$$\ddot{x}_i=0, \quad \ddot{x}_j=b_{jk+1}x_{k+1}+\ldots+b_{jn}x_n \quad (i=1, \cdots, k;\ j=k+1, \cdots, n) \tag{2.2}$$

Система (2.2) неустойчива по Ляпунову.

Предполагаем, что система $\ddot{x}=Bx$ устойчива по Ляпунову, где B—(n—k)×(n—k) матрица.

Известно [6] (стр. 106), что приложением гироскопических сил систему (2.2) можно сделать устойчивой по Ляпунову.

Пусть после приложения гироскопических сил система (2.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1=a_1\dot{x}_2,\\
&\ddot{x}_2=-a_1\dot{x}_1+a_2\dot{x}_3,\\
&\ddot{x}_3=-a_2\dot{x}_2+a_3\dot{x}_4,\\
&— \quad — \quad — \quad — \quad (a_i\neq 0,\ i=1,\cdots,k-1;\ j=k+1,\ \cdots,\ n). \qquad (2.3)\\
&\ddot{x}_{k-1}=-a_{k-2}\dot{x}_{k-2}+a_{k-1}\dot{x}_k,\\
&\ddot{x}_k=-a_{k-1}\dot{x}_{k-1},\\
&\ddot{x}_j=b_{jk+1}x_{k+1}+\ldots+b_{jn}x_n.
\end{aligned}$$

Матрица системы (2.3) имеет блочный вид $S_1=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{pmatrix}$, где

$$A_1=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_1 & & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0\\
0 & -a_1 & 0 & 0 & & 0 & 0\\
— & — & — & — & — & — & —\\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & & -a_{k-1} & 0
\end{pmatrix},$$

$$B_1=\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_{k+1\,k+1} & 0 & b_{k+1\,k+2} & 0 & b_{k+1n} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
b_{k+2\,k+1} & 0 & b_{k+2\,k+2} & 0 & b_{k+2n} & 0\\
- & - & - & - & - & -\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
b_{nk+1} & 0 & b_{nk+2} & 0 & b_{nn} & 0
\end{array}\right).$$

Корни уравнения $|A_1-\lambda E|=0$ будут

$$\lambda_i=0,\quad i=1,\cdots,k;\quad \mathrm{Re}\lambda_j=0,\quad \mathrm{Im}\lambda_j\neq0,\quad j=k+1,\cdots,2k \tag{2.4}$$

и $\mathrm{rang}A_1=k$.

Система (2.3) при (2.4) устойчива по Ляпунову, но согласно теореме 1.2 неустойчива по действующей силе.

Пусть на систему (2.3) приложены диссипативные силы с частичной диссипацией так, чтобы она принимала следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot x_1=-\beta\dot x_1+a_1\dot x_2,\\
&\ddot x_2=-a_1\dot x_1+a_2\dot x_3,\\
&x_3=-a_2\dot x_2+a_3\dot x_4,\\
&-\ -\ -\ -\ -\qquad (j=k+1,\cdots,n).\\
&\ddot x_{k-1}=-a_{k-2}\dot x_{k-2}+a_{k-1}\dot x_k,\\
&\ddot x_k=-a_{k-1}\dot x_{k-1},\\
&\ddot x_j=b_{jk+1}x_{k+1}+\ldots+b_{jn}x_n-\sum_{l=k+1}^{n}\beta_{jl}\dot x_l
\end{aligned}\tag{2.5}$$

(здесь $\beta>0$, а форма $\sum\limits_{j,l=k+1}^{n}\beta_{jl}x_jx_l$ определенно-положительная). Тогда

матрица системы (2.5) будет $S_2=\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$, где

$$A_2=\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\beta & 0 & a_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
- & - & - & - & - & -\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & -a_{k-1} & 0
\end{array}\right),$$

$$
B_2=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
b_{k+1\,k+1} & -\beta_{k+1\,k+1} & b_{k+1\,k+2} & -\beta_{k+1\,k+2} & \ldots & b_{k+1n} & -\beta_{k+1n} \\
0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\
b_{k+2\,k+1} & -\beta_{k+2\,k+1} & b_{k+2\,k+2} & -\beta_{k+2\,k+2} & \ldots & b_{k+2n} & -\beta_{k+2n} \\
- & - & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\
b_{nk+1} & -\beta_{nk+1} & b_{nk+2} & -\beta_{nk+2} & & b_{nn} & -\beta_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Известно [6] (стр. 102), что все корни уравнения $|B_2-\lambda E|=0$ имеют отрицательные вещественные части. При помощи неособого линейного преобразования матрицу A_2 можно привести к виду

$$
A_3=\left(\begin{array}{cccc|cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
- & - & - & - & & & O & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
\hline
 & & & & -\beta & a_1^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & -1 & 0 & a_2^2 & & 0 & 0 \\
 & & O & & 0 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\
 & & & & - & 0 & - & - & - & - \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k-1}^2 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0
\end{array}\right).
$$

Корни уравнения $|A_3-\lambda E|=0$ при $\beta>0$, $a_i\neq 0$, $i=1, \ldots, k-1$, удовлетворяют следующему условию [7] (стр. 277):

$$
\lambda_i=0,\quad i=1,\ \cdots,\ k;\quad \mathrm{Re}\lambda_j<0,\quad j=k+1,\ \cdots,\ 2k \tag{2.6}
$$

и $\mathrm{rang}\,\mathbf{A}_3=k$.

Система (2.5) при условии (2.6) согласно теореме 1.1 устойчива по действующей силе.

Таким образом, верно следующее утверждение:

Теорема 2.1. Если голономная консервативная механическая система имеет k циклических координат (k—четное число) и устойчиво по Ляпунову по остальным координатам, то приложением надлежащим образом выбранных гироскопических и диссипативных сил с частичной диссипацией можно систему сделать устойчивой по действующей силе.

Автор благодарит М. С. Габриеляна за постановку задачи и ценные советы.

Кафедра механики *Поступила 22.03.1985*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат: 1950.**
2. **Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.**
3. **Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.**

4. **Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.** О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом.—ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
5. **Гантмахер Ф. Р.** Курс аналитической механики. М.: Наука, 1966.
6. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. М.: Наука, 1968.
7. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

Ս. Գ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի կայունության խնդիրը, երբ ժամանակի վերջավոր միջակայքում համակարգի վրա ազդում են ինտեգրալով փոքր գրգռող ուժեր։ Տված է կայունության նոր սահմանում, որի համաձայն ոչ բոլոր կայուն (ըստ Լյապունովի) համակարգերն են մնում կայուն (ըստ ազդող ուժի)։ Ստացված են ըստ ազդող ուժի կայունության, անկայունության և ասիմպտոտիկ կայունության անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ։ Կատարված է հոլոնոմ կոնսերվատիվ ստացիոնար (անկայուն ըստ Լյապունովի) մեխանիկական համակարգի փոքր տատանումների կայունության ուսումնասիրությունը ըստ ազդող ուժի, երբ նրա վրա լրացուցիչ կիրառված են հատուկ ձևով ընտրված գիրոսկոպիկ և դիսիպատիվ ուժեր մասնակի դիսիպացիայով։