ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3,1990 **Естественные науки**

Механика

УДК 517.917

С.Г.ШАГИНЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО-МАЛЫХ ВОЗМУШЕНИЯХ ПО ВРЕМЕНИ

В данной работе рассматривается задача устойчивости по действующей силе [1] для систем с распределенными параметрами. Определены достаточные условия устойчивости для линейных и нелинейных систем с распределенными параметрами по действующей силе по мере ρ.

§1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается задача устойчивости систем с распределенными параметрами, когда на систему на конечном интервале времени действуют интегрально-малые по времени возмущающие силы.

Задача исследуется методом функций Ляпунова.

Впервые задача устойчивости по Ляпунову для уравнения теплопроводности была исследована в работе [2]. Затем эта задача для общих систем с распределенными параметрами была изучена различными авторами, подробное изложение которых содержится в книге [3].

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}=f_i(x,\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx}) \quad (i=1,\dots,n), \tag{1}$$

где $x \equiv (x_1,\dots,x_m)\in\tau\subset R^m$, $\varphi \equiv (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$,

$$\varphi_x \equiv \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_m}\right),\quad \varphi_{xx} \equiv \left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2},\dots,\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_m^2}\right],$$

$$f_i:R^m xR^n xR^{mxn}xR^{mxmxn}\longrightarrow R^1,\quad f_i(x,0,0,0)\equiv 0.$$

Вместе с системой (1) рассмотрим также систему

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}=f_i(x,\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})+\overline{g}_i(t,x) \quad (i=1,\dots,n), \tag{2}$$

где функции $\overline{g}_i(t,x):R^1xR^m\longrightarrow R^1$ удовлетворяют условию

$$\int_{t_0}^{T}\overline{g}_i(t,x)dt\equiv h_i(x)<\infty \quad (i=1,\dots,n)$$

для любого $x\in\tau\subset R^m$, $\overline{g}_i(t,x)\equiv 0$ при $t\geqslant T$ ($T>t_0$–заданная величина). Введем вектор-функцию $h(x)\equiv(h_1(x),\ldots,h_n(x))$.

Пусть граничные условия имеют вид

$$A_j(x,\varphi,\varphi_x)=0,\ x\in S,\ t>t_0\ (j=1,2,\ldots,n). \qquad (3)$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая область τ, где протекает процесс; область τ считается выпуклой, а поверхность S — гладкой.

Предполагается, что решение системы (1) при заданных граничных условиях (3) существует в заданном допустимом классе функций Φ и неограниченно продолжимо при $t\geqslant t_0\geqslant 0$ ([3],с.29). Здесь предполагается, что заранее заданы допустимое множество Φ процессов $\varphi(x,t)$ и допустимое множество Φ_H начальных состояний $\varphi_0(x)$.

Предполагается также, что функции $\overline{g}_i(t,x)$ $(i=1,\ldots,n)$ удовлетворяют условиям существования решения системы (2) при граничных условиях (3).

Пусть $\rho[\varphi]=\rho[(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]$ — некоторая мера отклонения ([3], с.30) и пусть она удовлетворяет свойствам нормы ([4],с.139).

Определение 1. Процесс $\varphi\equiv 0$, определяемый системой (1), называется устойчивым по действующей силе по мере ρ, если для любого $\varepsilon>0$ и каждого t_0 можно указать такое число $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, что для любого допустимого распределения $\varphi(x,t)\in\Phi$, удовлетворяющему системе (2):

$$\rho[\varphi(\cdot,t)]<\varepsilon \text{ при } t\geqslant T, \text{ если } \rho[\varphi(\cdot,t_0)]<\delta \text{ и } \rho[h(x)]<\delta.$$

В противном случае процесс $\varphi\equiv 0$ называется неустойчивым по действующей силе по мере ρ.

Определение 2. Процесс $\varphi\equiv 0$, определяемый системой (1), называется асимптотически устойчивым по действующей силе по мере ρ, если он устойчив по действующей силе по мере ρ и существует такое $\delta_0>0$,что для любого допустимого начального распределения с $\rho[\varphi(\cdot, t_0)]<\delta_0$ все допустимые процессы, удовлетворяющие уравнениям (2), удовлетворяют условию $\lim\limits_{t\to\infty}\rho[\varphi(\cdot,t)]=0$.

Установим достаточные условия, при которых процесс $\varphi\equiv 0$, определяемый системой (1), будет устойчивым по действующей силе по мере ρ.

§2. Линейные системы. Рассмотрим сначала систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными, т.е.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=L_{xi}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (4)$$

где

$$L_{xi}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}(x)\varphi_j+\sum_{p=1}^{m}b_{ij}^{p}(x)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_p}+\sum_{p,q=1}^{m}c_{ij}^{pq}(x)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_p\partial x_q}\right] \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^{n}\left[A_{ij}(x)\varphi_j+\sum_{p=1}^{m}A_{ij}^{p}(x)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_p}\right]_s=0 \quad (i=1,\ldots,n). \qquad (6)$$

Здесь $a_{ij}(x)$ — непрерывные, $b^p_{ij}(x)$ — непрерывно-дифференцируемые,

$c_{ij}^{pq}(x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемые функции по $x \in \tau \subset R^m$. Коэффициенты $A_{ij}(x)$ непрерывные, а $A_{ij}^p(x)$ непрерывно-дифференцируемые по x.

Пусть граничные условия (6) таковы, что система (4) допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(x)\varphi_j(x,t)=c_i(x) \qquad (i=1,\dots,k;\ 0\leqslant k\leqslant n), \tag{7}$$

где $D=(d_{ij}(x))$ – $k\times n$-матрица, элементы которой непрерывные ограниченные функции от x, а $\operatorname{rang} D=k$ для любого $x\in\tau\subset R^m$. Покажем, что в этом случае существует невырожденная матрица G(x) такая, что с помощью линейного преобразования $\psi=G(x)\varphi$ систему (4) можно привести к виду

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=0, \quad i=1,\dots,k; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t}=L_{xj}^*(c_1(x),\dots,c_k(x),\psi_{k+1},\dots,\psi_n), \qquad (j=k+1,\dots,n) \tag{9}$$

Действительно, пусть матрица G(x) имеет вид

$$G(x)=\begin{bmatrix} d_{11}(x)\cdots d_{1k}(x) & d_{1k+1}(x)\cdots d_{1n}(x) \\ \hdashline d_{k1}(x)\cdots d_{kk}(x) & d_{kk+1}(x)\cdots d_{kn}(x) \\ 0\ \cdots\ 0 & 1\ \cdots\ 0 \\ \hdashline 0\ \cdots\ 0 & 0\ \cdots\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{rang} D=k$, то всегда можно выбрать непрерывные и ограниченные в τ функции $q_{ij}(x)$ $(i=k+1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$ такие, чтобы $\det G(x)\neq 0$ при $x\in\tau$. Тогда после преобразования $\psi=G(x)\varphi$ система (4) примет вид

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=L_{xi}^*(\psi_1,\dots,\psi_n), \qquad (i=1,\dots,n). \tag{11}$$

Из (7) и (10) вытекает, что

$$0=L_{xi}^*(c_1,\dots,c_k,\psi_{k+1},\dots,\psi_n) \qquad (i=1,\dots,k)$$

для любого $c_1,\dots,c_k,\psi_{k+1},\dots,\psi_n$. Следовательно,

$$L_{xi}^*(c_1,\dots,c_k,\psi_{k+1},\dots,\psi_n)\equiv 0 \text{ при } i=1,\dots,k.$$

Таким образом после преобразования $\psi=G(x)\varphi$ система (4) примет вид (8)–(9).

Соответствующая возмущенная система будет

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=g_i(t,x), \qquad i=1,\dots,k; \tag{12}$$

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t}=L_{xj}^*(c_1,\dots,c_k,\psi_{k+1},\dots,\psi_n)+g_j(t,x) \qquad (j=k+1,\dots,n), \tag{13}$$

где вектор $g(t,x)=G(x)\overline{g}(t,x)$, и при $\rho[h(x)]<\delta_1$ предполагаем, что

$$\rho[(\int_{t_0}^{T} G(x)\overline{g}(t,x)dt)^*]=\rho[(G(x)\int_{t_0}^{T}\overline{g}(t,x)dt)^*]=\rho[(\int_{t_0}^{T}\overline{g}(t,x)dt)^*\cdot G^*(x)]=$$

$=\rho[h(x)\cdot G^*(x)]\leqslant C\cdot \rho[h(x)]<C\cdot \delta_1=\delta.$

Здесь * – знак транспонирования, C – некоторая положительная постоянная. Для норм стандартных функциональных пространств эту оценку можно получить при помощи неравенства Минковского.

Рассмотрим допустимые процессы в некоторой окрестности $\Gamma_R=\{\psi(\cdot,t):\rho[\psi(\cdot,t)]<R\}$, где R – положительная постоянная.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. Если система (4) допускает независимые первые интегралы вида (7) и для системы (9) существует непрерывный при $\rho=0$ и определенно–положительный по ρ в области Γ_R (где R –любое сколь угодно большое положительное число) функционал $V[(c_1,\dots,c_k,\psi_{k+1},\dots,\psi_n)]$, производная которого по времени вдоль рассматриваемых процессов системы (9) определенно-отрицательная по ρ, $\lim\limits_{\rho\to\infty}V=\infty$ и $\lim\limits_{V\to\infty}\rho=\infty$ при $T\leqslant t<\infty$, равномерно по $c_i(x)$ $(i=1,\dots,k;x\in\tau)$, то процесс $\varphi\equiv0$ системы (4) устойчив по действующей силе по мере ρ.

Доказательство. Пусть система (4) допускает независимые первые интегралы вида (7). Как показано выше, в этом случае систему (4) можно привести к виду (8)-(9).Интегрируя соответствующую системе (8) возмущенную систему (12), получим

$$\psi_i(t,x)=\int_0^t g_i(\theta,x)d\theta +c_i(x) \qquad (\psi_i(t_0,x)=c_i(x),\quad i=1,\dots,k),$$

следовательно,

$$\psi_i(t,x)=\int_0^T g_i(t,x)dt+c_i(x) \text{ при } t\geqslant T \quad (i=1,\dots,k).$$

Тогда при $t\geqslant T$ $\rho[\psi]=\rho[\bar h(x)+c(x)]$, где $\bar h(x)\equiv(h_1(x),\dots,h_k(x)),c(x)\equiv\equiv(c_1(x),\dots,c_k(x))$.

Пусть

$$\rho[\psi(\cdot,t_0)]<\delta \text{ и } \rho[h(x)]<\delta. \tag{14}$$

Тогда $\rho[\psi(\cdot,t_o)]=\rho[c(x)]<\delta$ и $\rho[\bar h(x)]<\delta$. Так как мера отклонения $\rho[\psi(\cdot,t)]$ обладает свойством нормы,то, используя неравенство треугольника ([4],с.139), получим

$$\rho[\bar h(x)+c(x)]\leqslant\rho[\bar h(x)]+\rho[c(x)]<\delta+\delta=\varepsilon. \tag{15}$$

Из условий теоремы 1 следует, что все условия теоремы об асимптотической устойчивости в целом по мере ρ ([3], с.211) для системы (9) выполнены равномерно по $c_i(x)$ $(i=1,\dots,k)$. Следовательно,

$$\rho[\psi(\cdot,t)]\to0 \text{ при } t\to\infty. \tag{16}$$

Тогда согласно (15) и (16) для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon,t_o)>0$ и момент времени $t_*>T$ такие, что $\rho[\psi]<\varepsilon$ при $t\geqslant t_*$, если имеют место соотношения (14).

Таким образом теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 1 k=0, то процесс $\varphi\equiv0$ системы (4) будет асимптотически устойчив по действующей силе по мере ρ.

§3. Нелинейные системы. Рассмотрим снова систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида (1) и граничными условиями вида (3). Пусть

$$f_i(x,\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})\Big|_{\varphi=(0,\dots,0,\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n)}\equiv 0, \qquad i=1,\dots,n; \tag{17}$$

$$f_i(x,\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})\Big|_{\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_k,0,\dots,0)}\equiv 0, \qquad i=k+1,\dots,n. \tag{18}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если для системы (1) существует непрерывный при $\rho=0$ и определенно положительный по ρ в области Γ_R (где R–любое сколь угодно большое положительное число) функционал $V[\varphi]$, производная которого вдоль рассматриваемых процессов системы (1) $\dot V=W[\varphi]=W[(\varphi_1,\dots,\varphi_k)]$ – знакопостоянный функционал отрицательного знака по ρ, причем функционал $W[\varphi]$ – определенно-отрицательный по ρ в подпространстве $\{(\varphi_1,\dots,\varphi_n):\varphi_i\in\Gamma_R\ \ i=1,\dots,k;\varphi_{k+1}=\dots=\varphi_n=0\}$, где имеют место соотношения $\lim\limits_{\rho\to\infty}V[\varphi]=\infty$ и $\lim\limits_{V\to\infty}\rho[\varphi]=\infty$, то процесс $\varphi\equiv 0$ устойчив по действующей силе по мере ρ.

Доказательство. Пусть для системы (1) имеют место все условия теоремы 2. По условию теоремы $W[\varphi]<0$ в подпространстве $\{(\varphi_1,\dots,\varphi_n),\ \ \varphi_i\in\Gamma_R,\ \ i=1,\dots,k;\varphi_{k+1}=\dots=\varphi_n=0\}$, где система (1) по условию (18) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=f_i(x,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_x,\overline{\varphi}_{xx})\ \ (i=1,\dots,k), \tag{19}$$

где $\overline{\varphi}\equiv(\varphi_1,\dots,\varphi_k),\overline{\varphi}_x\equiv\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}\right),\overline{\varphi}_{xx}=\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2},\dots,\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_m^2}\right)$.

Тогда система (19) асимптотически устойчива в целом по мере ρ ([3],с.211). Следовательно, она устойчива в целом по действующей силе по мере ρ.

По условию теоремы 2 $W[\varphi]=0$ в подпространстве $\{(\varphi_1,\dots,\varphi_n):\ \varphi_1=\dots=\varphi_k=0;\ \ \varphi_i\in\Gamma_R,\ \ i=k+1,\dots,n\}$, где система (1) по условию (17) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=0\ \ (i=k+1,\dots,n).$$

В этих условиях соответствующая возмущенная система (система (2)) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\overline{g}_i(t,x),\ \ i=k+1,\dots,n, \tag{20}$$

решение которой при начальных условиях $\varphi_i(t_0,x)=\varphi_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$ будет

$$\varphi_i(t,x)=\varphi_i(x)+\int_{t_0}^{t}\overline{g}_i(\theta,x)d\theta\ \ (t_0\leqslant t<T)\ \text{ и }\ \varphi_i(t,x)=\varphi_i(x)+\int_{t_0}^{T}\overline{g}_i(t,x)dt=$$

$$=\varphi_i(x)+h_i(x)\ \ (t\geqslant T;\ i=k+1,\dots,n). \tag{21}$$

Оценим меру отклонения $\rho[\varphi]$ в подпространстве $W[\varphi]=0$ при $t\geqslant T$. По условию (21) $\rho[\varphi]=\rho[\overline{\varphi}(x)+\overline{h}(x)]$, где $\overline{\varphi}(x)\equiv(\varphi_{k+1}(x),\dots,\varphi_n(x))$, $\overline{h}(x)\equiv(h_{k+1}(x),\dots,h_n(x))$.

Пусть $\rho[\varphi(\cdot,t_0)]<\delta$ и $\rho[h(x)]<\delta$. Тогда $\rho[\overline{\varphi}(x)]<\delta$ и $\rho[\overline{h}(x)]<\delta$. Так как мера отклонения $\rho[\varphi(\cdot,t)]$ имеет свойства нормы, то, используя неравенство треугольника ([4],с.139), получим

$$\rho[\overline{\varphi}(x)+\overline{h}(x)]\leqslant\rho[\overline{\varphi}(x)]+\rho[\overline{h}(x)]<\delta+\delta=\varepsilon.$$

Таким образом в подпространстве $W[\varphi]=0$ система (1) устойчива по действующей силе по мере ρ, а в подпространстве $W[\varphi]<0$–асимптотически устойчив по действующей силе по мере ρ. Следовательно, в окрестности Γ_R для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(t_0,\varepsilon)>0$ такое, что при $t\geqslant T$ $\rho[\varphi(\cdot,t)]<\varepsilon$, если $\rho[\varphi(\cdot,t_0)]<\delta$ и $\rho[h(x)]<\delta$.

Теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 2 $k=n$, то процесс $\varphi\equiv0$ системы (1) будет асимптотически устойчив по действующей силе по мере ρ.

§4. Пример. Пусть процесс описывается системой третьего порядка

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\varphi_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \varphi_2\varphi_3^2\varphi_1 f(\varphi_x,\varphi_{xx},x), \qquad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} = -\varphi_2^2\varphi_3\varphi_1 f(\varphi_x,\varphi_{xx},x),$$

где $x\in\tau\subset R^m$, $\varphi_x\equiv\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_m}\right)$, $\varphi_{xx}\equiv\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2},\dots,\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_m^2}\right)$,

$f(\varphi_x,\varphi_{xx},x)$ – непрерывная функция. Введем функционал $V[\varphi] = \frac{1}{2}\int\limits_\tau\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i^2 d\tau$, который является непрерывным при $\rho=0$, где $\rho=\int\limits_\tau(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)d\tau$, и определенно-положительным по мере ρ в области Γ_R (R – любое сколь угодно большое число). Производная $V[\varphi]$ по времени в силу системы (22) будет

$$\dot V[\varphi] = -\int\limits_\tau\varphi_1^2 d\tau \leqslant 0.$$

Очевидно, что в подпространстве $\dot V[\varphi]<0$ имеют место $\lim\limits_{\rho\to\infty}V[\varphi]=\infty$ и $\lim\limits_{V\to\infty}\rho[\varphi]=\infty$. Тогда для системы (22) имеют место все условия теоремы 2. Следовательно, процесс $\varphi\equiv0$ $(\varphi\equiv(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$ системы (22) устойчив по действующей силе по мере ρ.

Кафедра теоретической механики *Поступила 6.03.1990*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С., Шагинян С.Г.** О построении функций Ляпунова. - Уч.зап.ЕГУ, 1987, №1, с.39-45.
2. **Костандян Б.А.** Об устойчивости решения нелинейного уравнения теплопроводности. - ПММ, 1960, т.24, вып.6, с.1112-1114.
3. **Сиразетдинов Т.К.** Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Изд-во Наука (Сиб.отд.), 1987, с.232.
4. **Колмогоров А.И., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука, 1976, с.543.

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է բաշխված պարամետրերով համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը:

Ստացված են բավարար պայմաններ բաշխված պարամետրերով գծային և ոչ գծային համակարգերի համար ըստ ազդող ուժի և ըստ ρ չափի կայունության:

SUMMARY

The stability problem for the systems with distributed parameters according to acting forces is considered in the paper. The sufficient conditions of stability are defined under which the linear and non-linear systems with distributed parameters are stable according to the acting force and ρ.