ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1988 Естественные науки

Механика

УДК 517.934

С. Г. ШАГИНЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В работе рассматривается задача оптимальной стабилизации управляемого объекта, когда минимизируемый функционал является знакопостоянным, а система становится только устойчивой по действующей силе.

В общем случае получены достаточные условия, при которых возможно решить задачу оптимальной стабилизации по действующей силе.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый объект [1—3] описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_r) \quad (i=1, \cdots, n), \tag{1.1}$$

где функции $F_i: R^{n+r} \to R^n$ определены и непрерывны в области

$$|x_i| < \infty \ (i=1, ..., n), \ -\infty < u^j < +\infty \ (j=1, ..., r), \tag{1.2}$$

$F_i(0, \cdots, 0) = 0$, $i=1, \cdots, n$, и удовлетворяют условию Липшица по переменным $x_1, \cdots, x_n$ равномерно по u_j $(j=1, \cdots, r)$ в некоторой ограниченной подобласти G области (1.2).

Сформулируем следующие задачи:

Задача 1.1. (О стабилизации по действующей силе). Требуется найти такие управляющие воздействия $u_j(x_1, \cdots, x_n)$ $(j=1, \cdots, r)$, которые обеспечивают устойчивость по действующей силе [4] решения $x_i \equiv 0$ $(i=1, \cdots, n)$ уравнений (1.1) при $u_j = u_j(x_1, \cdots, x_n)$.

Задача 1.2. (Об оптимальной стабилизации по действующей силе). Требуется найти такие управляющие воздействи $u_j^0(x_1, ..., x_n)$ $(j=1, \cdots, r)$, которые обеспечивают устойчивость по действующей силе решения $x_i \equiv 0$ $(i=1, \cdots, n)$ и минимизируют функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \bar{\omega}(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_r) Dt. \tag{1.3}$$

§ 2. Достаточные условия разрешимости задачи о стабилизации по действующей силе. Пусть система (1.1) при некоторых $u(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$, разрешающих задачу 1.1, допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i = \text{const} < \infty \quad (i=1, \cdots, k; \ 1 < k < n) \tag{2.1}$$

(множество всех векторов u, удовлетворяющих условию (2.1) обозначим через P ($P \subset R_r$)), тогда с помощью неособого линейного преобразования $y = Dx$, где

$$D = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ b_{k+11} & \dots & b_{k+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

система (1.1) приводится к виду

$$\dot{y}_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, k), \tag{2.2}$$

$$\dot{y}_j = \Phi_j(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) \quad (j = k+1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

($\det D \neq 0$, так как $\operatorname{rang} A = k$).

Действительно, после преобразования $y = Dx$, система (1.1) примет вид

$$\dot{y}_i = \Phi_i(y_1, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{2.4}$$

Из (2.1) и (2.4) следует, что

$$0 = \Phi_i(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

при любых $c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r$. Следовательно,

$$\Phi_i(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) \equiv 0 \quad (i = 1, \cdots, k),$$

т. е. после преобразования $y = Dx$ система (1.1) принимает вид (2.2), (2.3). Задача 1.1 для системы (2.2), (2.3) формулируется таким же образом, как в § 1, а задача 1.2—следующим образом.

Задача 2.1. Требуется найти такие управляющие воздействия $u_j^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$ ($j = 1, \cdots, r$), которые обеспечивают устойчивость по действующей силе решений $y_i = 0$ ($i = 1, \cdots, n$) системы (2.2), (2.3) при $u_j = u_j^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$ и минимизируют функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \bar{\omega}(c_1, \dots, c_k, y_{k+1}, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r)\, dt. \tag{2.5}$$

Очевидно, что если разрешается задача 2.1 для системы (2.2)—(2.3), то найденное управляющее воздействие, разрешающее задачу 2.1, разрешает также задачу 1.2 для системы (1.1).

Рассмотрим функцию $V(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$, определенно-положительную по переменным $y_{k+1}, \cdots, y_n$ и равномерную по c_i ($|c_i| < c < < \infty$; $i = 1, \cdots, k$).

Составим выражение (функцию Беллмана) [5]:

$$B(V, c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \Phi_j(c_1, \cdots, c_k, \tag{2.6}$$

$$y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) + \bar{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r),$$

где $\bar{\omega}: R^{n+r} \to R^1$—непрерывная функция.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если система (1.1) при $u \in P$ допускает первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i = \text{const} \quad (i=1, \cdots, k;\ 1 \leqslant k \leqslant n)$$

и если для системы (2.3) можно указать определенно-положительную по переменным $y_{k+1}, \cdots, y_n$ функцию $V^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$, равномерную по c_i ($|c_i| \leqslant c < \infty$, $i=1, \cdots, k$), и функции $u_j^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$ ($j=1, \cdots, r$; $u^0 \in P$), удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} V^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0, \cdots, y_n^0) = \infty$, $\left(\|y\| = \left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}\right)$,

2) функция $\bar{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0, \cdots, y_n^0, u_1^0, \cdots, u_r^0)$ является определенно-положительной, равномерной по c_i $(i=1, \cdots, k)$,

3) $B(V^0, c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0, \cdots, y_n^0, u_1^0, \cdots, u_r^0) = 0$,

4) каковы бы ни были функции u_j ($j=1, \ldots, r$; $u \in P$),

$$B(V, c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r) \geqslant 0,$$

то функции u_j^0 ($j=1, \ldots, r$, $u^0 \in P$) разрешают задачу 2.1 об оптимальной стабилизации по действующей силе. При этом имеет место неравенство

$$V^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+10}^0, \cdots, y_{n0}^0) = \int_{t_0}^{\infty} \bar{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0, \cdots, y_n^0, u_1^0, \cdots,$$

$$u_r^0)dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \bar{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r)dt, \tag{2.7}$$

равномерное по c_i ($i=1, \cdots, k$; $y_j^{0*} = y_j^0(t_0)$; $j=k+1, \cdots, n$).

Действительно, по условиям теоремы при $u_j^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$ система (1.1) допускает независимые первые интегралы вида (2.1), следовательно, после преобразования $y = Dx$ она примет вид

$$\dot{y}_i = 0, \tag{2.8}$$

$$\dot{y}_j = \Phi_j(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1^0(\cdot), \cdots, u_r^0(\cdot)) \tag{2.9}$$

$$(i=1, \cdots, k;\ j=k+1, \cdots, n;\ u_l^0(\cdot) = u_l^0(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n),$$
$$l=1, \cdots, r).$$

Решение $y_i = 0$ ($i=1, \cdots, k$) уравнений (2.8) устойчиво по действующей силе, а для системы уравнений (2.9) по условию теоремы 2.1 имеют место условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [6]. Так как преобразование $y = Dx$ линейное и невырожденное, то система (1.1) будет устойчивой по действующей силе, так как для нее имеют место все условия теоремы 2.1 [4].

Теперь покажем справедливость неравенства (2.7). Рассмотрим движение $y^0(t, u^0(\cdot)) = (c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0(t, u^0(\cdot)), \cdots, y_n^0(t, u^0(\cdot)))^*$. Так как вдоль этого движения выполняется условие 3) теоремы 2.1 при всех $t > t_0$, то

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{u^0} = -\bar{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}^0, \cdots, y_n^0, u_1^0, \cdots, u_r^0). \tag{2.10}$$

Проинтегрировав (2.10) вдоль движения $y^0(t, u^0(\cdot))$ в пределах от t_0 до ∞, получим

$$V^0(c_1, \cdots, c_k, y^0_{k+10}, \cdots, y^0_{n0}) = \int_{t_0}^{\infty} \overline{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y^0_{k+1}, \cdots, y^0_n, u^0_1, \cdots, u^0_r)dt$$

$$(V^0(y^0(\infty, u^0(\cdot))) = 0).$$

Осталось показать, что u_j^0 $(j=1, \cdots, r)$ являются оптимальными управлениями. Из условия 4) теоремы 2.1 следует, что

$$\left(\frac{dV^0}{dt}\right)_u \geqslant -\overline{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r). \tag{2.11}$$

Интегрируя неравенство (2.11) на промежутке $[t_0, \infty)$, получим

$$V_0(c_1, \cdots, c_k, y^0_{k+10}, \cdots, y^0_{n0}) \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \overline{\omega}(c_1, \cdots, c_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, u_1, \cdots, u_r)dt.$$

Теорема доказана.

§ 3. Построение оптимальной функции Ляпунова в случае линейных систем. Рассмотрим управляемый объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^r$; A, B—$n x n$, $n x r$—постоянные матрицы соответственно.

Требуется найти такое управляющее воздействие u^0, которое разрешает задачу 1.1 для системы (3.1) и минимизирует функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{k,l=1}^{r} \beta_{kl} u_k u_l \right) dt. \tag{3.2}$$

Здесь $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$—знакопостоянная квадратичная форма положительного знака, а $\sum\limits_{k,l=1}^{r} \beta_{kl} u_k u_l$—определенно положительная.

Если система (3.1) вполне управляема, то для нее не целесообразно поставить задачи 1.1 и 1.2, так как в этом случае оптимальное управляющее воздействие, разрешающее задачу 1.2, обеспечит асимптотическую устойчивость системы (3.1).

Таким образом, рассмотрим тот случай, когда система (3.1) не вполне управляема, т. е.

$$\operatorname{rang} K = \operatorname{rang}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = m < n. \tag{3.3}$$

Известно ([7], стр. 141), что в этом случае при помощи неособого линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = Lx \tag{3.4}$$

(y, s—векторы-столбцы размеров m, $n-m$ соответственно) систему (3.1) можно привести к виду

$$\dot{y} = P_1 y + P_2 s + Qu,$$

$$\dot{s} = P_3 s, \tag{3.5}$$

где $L=(k^{[1]}, \cdots, k^{[m]}, l^{[m+1]}, \cdots, l^{[n]})$ образуется из m линейно независимых векторов $k^{[1]}, ..., k^{[m]}$ матрицы K (3.3) и из $n-m$ произвольно выбранных векторов $l^{[m+1]}, ..., l^{[n]}$, причем $\det L \neq 0$; P_1, P_2, P_3, Q—$n\times m$, $m\times(n-m)$, $(n-m)\times(n-m)$, $m\times r$—матрицы соответственно.

После преобразования (3.4) функционал (3.2) принимает следующий вид:

$$J[u]=\int_{t_0}^{\infty}\Big(\sum_{i,j=1}^{m}\gamma_{ij}y_iy_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n}\gamma_{ij}y_is_j+\sum_{i,j=m+1}^{n}\gamma_{ij}s_is_j+\sum_{k,l=1}^{r}\beta_{kl}u_ku_l\Big)dt. \quad (3.6)$$

Известно, что система (3.5) стабилизируема в смысле [2, 3] тогда и только тогда, когда все собственые числа матрицы P_3 имеют отрицательные вещественные части ([5], стр. 165). Следовательно, если все собственные числа матрицы P_3 имеют отрицательные вещественные части, то задача оптимальной стабилизации по действующей силе сводится к изученному в [5] (стр. 165) случаю.

Таким образом целесообразно рассмотреть тот случай, когда корни уравнения

$$|P_3-\lambda E|=0 \quad (3.7)$$

имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}&1)\ \operatorname{Re}\lambda_i<0,\ i=1, ..., k_1,\ (0\leqslant k_1\leqslant n-m),\\ &2)\ \lambda_j=0,\ j=k_1+1, \cdots, n-m,\end{aligned} \quad (3.8)$$

причем корням λ_j $(j=k_1+1, \cdots, n-m)$ соответствуют простые элементарные делители.

В противном случае при любых управляющих воздействиях система $\dot{s}=P_3s$ (3.5) неустойчива по действующей силе [8].

Когда корни уравнения (3.7) имеют структуру (3.8), тогда известно ([9], стр. 84), что с помощью неособого линейного преобразования

$$s=Mz \quad (\det M\neq 0) \quad (3.9)$$

систему $\dot{s}=P_3s$ можно привести к виду

$$\dot{z}_i=p^{(4)}_{im+1}z_{m+1}+\ldots+p^{(4)}_{im+k_1}z_{m+k_1},$$

$$\dot{z}_j=0\ (i=m+1, \cdots, m+k_1;\ j=m+k_1+1, \cdots, n),$$

т. е. систему (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\dot{y}_i=p^{(1)}_{i1}y_1+\ldots+p^{(1)}_{im}y_m+p^{(5)}_{im+1}z_{m+1}+\ \ldots\ +p^{(5)}_{in}z_n+q_{i1}u_1+\ldots+q_{ir}u_r,\\ &\dot{z}_j=p^{(4)}_{jm+1}z_{m+1}+\ldots+p^{(4)}_{jm+k_1}z_{m+k_1},\\ &\dot{z}_l=0\ (i=1, \cdots, m;\ j=m+1, \cdots, m+k_1;\ l=m+k_1+1, \cdots, n;\\ &P_5=P_1M).\end{aligned} \quad (3.10)$$

В системе (3.10) последние $n-m$ уравнения интегрируются отдельно. Интегрируя последние $n-m$ уравнения по начальным значениям $z_i(t_0)=z_i^0$ $(\|z_0\|_{n-m}<\delta;\ i=m+1, \cdots, n)$ и подставляя их значения $z_i=z_i(t)$, $i=m+1, \cdots, m+k_1$; $z_j=c_j$, $j=m+k_1+1, \cdots, n$ в первые m уравнения, получим

$$\dot{y}_i=\sum_{j=1}^{m}p^{(1)}_{ij}y_j+\sum_{j=m+1}^{m+k_1}p^{(5)}_{ij}z_j(t)+\sum_{j=m+k_1+1}^{n}p^{(5)}_{ij}c_j+\sum_{k=1}^{r}q_{ik}u_k \quad (3.11)$$

$(i=1, \cdots, m)$.

Система (3.11) является управляемой системой линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами, причем ее неоднородная часть удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k_1} p_{ij}^{(5)} z_j(t) \right\| < N_1 e^{-\alpha_1 t} \tag{3.12}$$

$$\left\| \sum_{j=m+k_1+1}^{n} p_{ij}^{(5)} c_j \right\| < N_2, \tag{3.13}$$

где N_1, N_2, α_1—положительные постоянные (так как корни уравнения (3.7) имеют структуру (3.8), а c_j, $j=m+k_1+1, \ldots, n$ зависят только от начальных условий). Следовательно, рассмотреть задачу стабилизации решения $y=0$ системы (3.11) невозможно, так как она в общем случае такого решения не имеет. Поэтому необходимо стабилизировать то решение системы (3.11), которое она допускает при $u=0$, $z_j(t)=0$, $j=m+1, \ldots, m+k_1$. Пусть это решение будет $\bar{y}$, т. е.

$$\dot{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(1)} \bar{y}_j + \sum_{j=m+k_1+1}^{n} p_{ij}^{(5)} c_j \quad (i=1, \cdots, n). \tag{3.14}$$

Введем новые переменные

$$v_i = y_i - \bar{y}_i, \ i=1, \cdots, m. \tag{3.15}$$

Тогда система (3.11) относительно этих переменных примет вид

$$\dot{v}_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(1)} v_j + \sum_{j=m+1}^{m+k_1} p_{ij}^{(5)} z_j(t) + \sum_{k=1}^{r} q_{ik} u_k, \ i=1, \cdots, m. \tag{3.16}$$

Естественно предполагать, что функционал (3.6) должны выбирать в таком виде, чтобы после преобразования (3.9) (3.15) он принимал следующий вид:

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \Big(\sum_{i,j=1}^{m} \varepsilon_{ij} v_i v_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+k_1} \varepsilon_{ij} v_i z_j + \sum_{i,j=m+1}^{m+k_1} \varepsilon_{ij} z_i z_j + \sum_{k,l=1}^{r} \delta_{kl} u_k u_l \Big) dt. \tag{3.17}$$

Так как в противном случае при любых управляющих воздействиях, разрешающих задачу 1.2 (для системы (3.1)), значение функционала (3.17) может стать бесконечным.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для того чтобы задача 1.2 для системы (3.1) при минимизации функционала (3.17) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения (3.7) имели следующую структуру:

1) $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, $i=1, \cdots, k_1$,

2) $\lambda_j = 0$, $j=k_1+1, \cdots, n-m$,

причем этим корням соответствовали простые элементарные делители $(0 < k_1 < n-m)$.

Доказательство достаточности. Пусть корни уравнения (3.7) имеют структуру (3.8). Покажем, что для системы (3.10) найдется управляющее воздействие u^0, которое обеспечит устойчивость по действующей силе системы (3.10) (или асимптотическую устойчивость системы (3.16)) и минимизирует функционал (3.17).

Функция Беллмана (2.6) для системы (3.16) будет

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial \nu_i}\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}^{(1)}\nu_j+\sum_{j=m+1}^{m+k_1}p_{ij}^{(5)}z_j(t)+\sum_{j=1}^{r}q_{ij}u_j\right)+\sum_{i,j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\nu_i\nu_j+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+k_1}\varepsilon_{ij}\nu_i z_j(t)+\sum_{i,j=m+1}^{m+k_1}\varepsilon_{ij}z_i(t)z_j(t)+\sum_{k,l=1}^{r}\delta_{kl}u_k u_l=B. \qquad (3.18)$$

Из условия минимума выражения 3.18 по u_k $(k=1, \cdots, r)$ получим [5] (стр. 38)

$$u_k^0=-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{r}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial \nu_i}q_{il}\right) \quad (k=1, \cdots, r). \qquad (3.19)$$

Подставляя значения u_k^0 (3.19) в (3.18), получаем следующее уравнение в частных производных для определения оптимальной функции Ляпунова V:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial \nu_i}\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}^{(1)}\nu_j+\sum_{j=m+1}^{m+k_1}p_{ij}^{(5)}z_j(t)\right)-\frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{r}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{m}q_{ik}\frac{\partial V}{\partial \nu_i}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}q_{jl}\frac{\partial V}{\partial \nu_j}\right)+\sum_{i,j=1}^{m}\varepsilon_{ij}\nu_i\nu_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{m+k_1}\varepsilon_{ij}\nu_i z_j(t)+$$

$$+\sum_{i,j=m+1}^{m+k_1}\varepsilon_{ij}z_i(t)z_j(t)=0. \qquad (3.20)$$

Решение уравнения (3.20) будем искать в следующем виде:

$$V(t, \nu)=V_2(\nu)+V_1(t, \nu)+V_0(t), \qquad (3.21)$$

где $V_2(\nu)$—некоторая квадратичная форма с постоянными коэффициентами; $V_1(t, \nu)$—форма первого порядка относительно переменных ν_i с коэффициентами, зависящими от времени t; $V_0(t)$—некоторая функция времени t.

Подставляя искомую функцию $V(t, \nu)$ (3.21) в выражение (3.20) и приравнивая к нулю члены одинакового порядка относительно ν_i, получим три уравнения для определения форм V_i $(i=2, 1, 0)$.

Решения этих уравнений получаются, как и в [5].

Итак, оптимальная функция Ляпунова существует и имеет вид (3.21), а оптимальные управляющие воздействия получаются из (3.19).

Таким образом достаточность теоремы 3.1 доказана.

Необходимость. Предположим от противного, т. е. среди собственных значений λ_i $(i=1, \cdots, n-m)$ матрицы P_3 имеется, по крайней мере, одно λ_j, у которого $\mathrm{Re}\lambda_j>0$ или $\lambda_j=0$ с кратностью $l\geqslant 2$, и последнему не соответствуют простые элементарные делители, или $\mathrm{Re}\lambda_j=0$, $\mathrm{I_m}\lambda_j\neq 0$. Тогда при любых u_j $(j=1, \cdots, r)$ система $\dot{s}=P_3 s$ (3.5) будет неустойчивой по действующей силе [8], т. е. систему (3.1) при помощи u_j $(j=1, \cdots, r)$ невозможно сделать устойчивой по действующей силе, откуда и следует необходимость теоремы 3.1.

Таким образом теорема 3.1 полностью доказана.

Кафедра механики *Поступила 26.06.1987*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
2. **Лётов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов. I—IV.—Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, №№ 4, 5, 6, 1961, т. 22, № 4.
3. **Лётов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов. V. Дальнейшее развитие проблемы.—Авт. и телемех., 1962, т. 23, № 11.
4. **Габриелян М. С., Шагинян С. Г.** О построении функции Ляпунова.—Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1.
5. **Альбрехт Э. Г., Шелементьев Г. С.** Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972.
6. **Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.** О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом.—ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
7. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
8. **Шагинян С. Г.** Об одной задаче теории устойчивости.—Уч. записки ЕГУ, 1986, № 2.
9. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ղեկավարվող համակարգի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը, երբ մինիմիզացվող ֆունկցիոնալը նշանահաստատուն է, իսկ համակարգը դառնում է միայն կայուն ըստ ազդող ուժի։

Ընդհանուր դեպքում ստացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում հնարավոր է լուծել օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը ըստ ազդող ուժի։

Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համար կառուցված է Լյապունովի ֆունկցիան և որոշված են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները, որոնք համակարգը դարձնում են կայուն ըստ ազդող ուժի։

SUMMARY

The problem of the optimal stabilization of a controlled system is considered in the paper when the minimizing functional is sign-constant and the system becomes stable only in the sense of the acting force [4].

In the general case, sufficient conditions are attained, according to which it is possible to solve the problem of the optimal stabilization by the acting force. For the linear differential equations with constant coefficients Lyapunov function is constructed and the optimal control actions are defined which make the system stable in the sense of the acting force.