ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1987 Естественные науки

Механика

УДК 531.36

М. С. ГАБРИЕЛЯН, С. Г. ШАГИНЯН

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Рассматривается задача устойчивости нелинейной стационарной системы дифференциальных уравнений, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально-малые возмущающие силы.

При помощи функции Ляпунова получаются необходимые и достаточные условия устойчивости по действующей силе для линейных стационарных систем. Определяются достаточные условия, при которых нелинейная система устойчива по действующей силе.

§ 1. Линейные системы. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}=Ax, \tag{1.1}$$

где $x\in R^n$, A — $n\times n$-матрица. Выясним, каким образом при помощи функций Ляпунова можно трактовать свойство устойчивости по действующей силе [1].

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1. Система (1.1) устойчива по действующей силе тогда и только тогда, когда существует знакоопределенная квадратичная форма V, производная которой по времени в силу системы (1.1) есть знакопостоянная форма W противоположного знака V и в подпространстве $W=0$ система (1.1) допускает только постоянные решения.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.1) устойчива по действующей силе.

Тогда корни уравнения

$$|A-\lambda E|=0 \tag{1.2}$$

будут [1]:

1) $\lambda_i=0$, $i=1, \ldots, k$; причем этим корням отвечают простые элементарные делители;

2) $\mathrm{Re}\lambda_i<0$, $i=k+1, \ldots, n$ $(1\leqslant k\leqslant n)$.

Известно [2] (стр. 84, 151), что с помощью неособого линейного преобразования систему (1.1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i=0;$$

$$\dot{y}_j=b_{jk+1}y_{k+1}+\ldots+b_{jn}y_n,\quad i=1, \ldots, k;\quad j=k+1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V=\sum_{i=1}^{k} y_i^2+\sum_{i,j=k+1}^{n} c_{ij}y_iy_j,$$

где $\sum\limits_{i,j=k+1}^{n} c_{ij}y_iy_j$ —определенно-положительная форма с неизвестными коэффициентами.

Так как система

$$\dot{y}_i = b_{ik+1}y_{k+1} + \ldots + b_{in}y_n \quad (i=k+1, \ldots, n)$$

($\dot{y}=By$) асимптотически устойчива по Ляпунову [3], то при любой определенно-отрицательной форме $W=\sum\limits_{i,j=k+1}^{n} d_{ij}y_iy_j$ коэффициенты c_{ij} определяются из $\frac{d}{dt}\sum\limits_{i,j=k+1}^{n} c_{ij}y_iy_j|_{\dot{y}=By}=W$ единственным образом.

В пространстве $R^n=\{y_1, \ldots, y_n\}$ форма $W(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ является знакопостоянной отрицательной.

Теперь достаточно показать, что в подпространстве $W=0$ система (1.3) допускает только постоянные решения. В самом деле, система (1.3) при $y_i=0$ $(i=k+1, \ldots, n)$ допускает первые интегралы вида $y_i=c_i$ $(i=1, \ldots, k)$.

Следовательно, в подпространстве $W(y_1, \ldots, y_n)=0$ система (1.3) на самом деле допускает только постоянные решения.

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для системы (1.1) существует определенно-положительная квадратичная форма $V=\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j$, удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j = W \leqslant 0.$$

Существует матрица $S(\det S \neq 0)$ [2] (стр. 279) такая, что при помощи преобразования $y=S^{-1}x$ форма W приводится к виду

$$W=-\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = (\operatorname{grad} V)_x \cdot Ax = (\operatorname{grad} V)_y \cdot S^{-1}ASy = -\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2.$$

По условию сформулированной теоремы в подпространстве $y_i=0$ $(i=k+1, \ldots, n)$ система

$$\dot{y}=S^{-1}ASy \tag{1.4}$$

не имеет других решений, кроме $y_i=c_i$ $(i=1, \ldots, k)$.

Покажем, что система $\dot{x}=Ax$ устойчива по действующей силе. Для этого достаточно показать, что корни уравнения $|A-\lambda E|=0$ имеют следующий вид:

1) $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$, причем этим корням отвечают простые элементарные делители;

2) $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=k+1, \ldots, n$.

Запишем систему (1.4) в виде

$$\dot{y}_i=\alpha_{i1}y_1+\ldots+\alpha_{in}y_n,\quad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{1.5}$$

Из последнего условия сформулированной теоремы следует, что система (1.5) имеет решение вида

$$y_i=c_i,\ \text{при}\ i=1,\ \ldots,\ k;\ y_i=0,\ \text{при}\ i=k+1,\ \ldots,\ n,$$

где c_i—произвольные постоянные.

Подставляя это решение в систему уравнений (1.5), получим

$$\alpha_{ij}=0,\ \text{при}\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ \ldots,\ k,$$

т. е. матрица $S^{-1}AS$ имеет вид

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & \alpha_{1k+1} & & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & & 0 & \alpha_{2k+1} & & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & 0 & \alpha_{nk+1} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

для которой $\lambda=0$ есть собственное число с кратностью k.

Составим тождество

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.5)}=-\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2$$

и предположим, что $y_i=0$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$. Тогда по известной теореме Ляпунова [3] (стр. 107) корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1\,k+1}-\lambda & \alpha_{k+1\,k+2} & \ldots & \alpha_{k+1n} \\ \alpha_{k+2\,k+1} & \alpha_{k+2\,k+2}-\lambda & \ldots & \alpha_{k+2n} \\ & & & \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{nk+1} & \alpha_{nk+2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

имеют отрицательные вещественные части.

Следовательно, корням $\lambda_i=0$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$ отвечают простые элементарные делители.

Теорема полностью доказана.

§ 2. Нелинейные системы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i=F_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)\quad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{2.1}$$

где $F_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывны в R^n, удовлетворяют условию Липшица в некоторой ограниченной области $G\subset R^n$ и

$$F_i(0,\ \ldots,\ 0)=0,\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть на систему (2.1) действуют возмущающие силы $\varphi_i(t)$:

$$\dot{x}_i=F_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\varphi_i(t),\quad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{2.2}$$

причем

$$\left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt\right\|_n=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

и $\varphi_i(t)\equiv 0$ при $t>T$ ($i=1, ..., n$; $T>t_0$—заданная величина).

Определение 2.1. Скажем, что решение $x\equiv 0$ системы (2.1) устойчиво по действующей силе, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0)>0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (2.2)

$$\|x(t)\|^n<\varepsilon,\quad \text{если } \|x(t_0)\|_n<\delta \quad \text{и } \left\|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)\,dt\right\|_n<\delta \text{ при } t\geqslant T.$$

В противном случае решение $x\equiv 0$ назовем неустойчивым по действующей силе.

Определение 2.2. Скажем, что решение $x\equiv 0$ системы ((2.1) асимптотически устойчиво по действующей силе, если оно устойчиво по действующей силе и $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|_n=0$.

Пусть система (2.1) допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=c_i=\text{const}\quad (i=1, ..., k;\ 1\leqslant k\leqslant n), \tag{2.3}$$

где $A=(a_{ij})$—$k\times n$—постоянная матрица ($\text{rang}A=k$). Покажем, что в этом случае существует невырожденная матрица C такая, что с помощью линейного преобразования $y=Cx$ систему (2.1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i=0,\quad i=1, ..., k; \tag{2.4}$$

$$\dot{y}_j=\Phi_j(c_1, ..., c_k, y_{k+1}, ..., y_n),\ j=k+1, ..., n. \tag{2.5}$$

Пусть матрица C имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ & \\ a_{k1} & a_{kn}\\ b_{k+11} & b_{k+1n}\\ & \cdot\ \ \cdot\\ b_{n1} & b_{nn}\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

причем $\text{rang}C=n$ (это всегда возможно, так как $\text{rang}A=k$). Тогда после преобразования $y=Cx$ система (2.1) примет вид

$$\dot{y}_i=\Phi_i(y_1, ..., y_n)\quad (i=1, ..., n). \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.6) следует, что

$$0=\Phi_i(c_1, ..., c_k, y_{k+1}, ..., y_n)\quad (i=1, ..., k)$$

для любых постоянных $c_1, ..., c_k$; и $y_{k+1}, ..., y_n$.

Следовательно,

$$\Phi_i(c_1, ..., c_k, y_{k+1}, ..., y_n)\equiv 0\quad (i=1, ..., k).$$

Отсюда следует, что система (2.7) имеет вид

$$\dot{y}_i = 0, \quad i = 1, \dots k,$$

$$\dot{y}_j = \Phi_j(c_1, \dots, c_k, y_{k+1}, \dots, y_n), \ j = k+1, \dots, n.$$

Система (2.2) после преобразования $y = Cx$ примет вид

$$\dot{y}_i = \psi_i(t), \quad i = 1, \dots, k; \tag{2.8}$$

$$\dot{y}_j = \Phi_j(c_1, \dots, c_k, y_{k+1}, \dots, y_n) + \psi_j(t), \ j = k+1, \dots, n; \tag{2.9}$$

где вектор $\psi(t) = C\varphi(t)$ и при $\|\int\limits_{t_0}^{T}\varphi(t)\,dt\|_n < \delta$, $\|\int\limits_{t_0}^{T}\psi(t)\,dt\|_n =$

$= \|\int\limits_{t_0}^{T} C\varphi(t)\,dt\|_n < \delta_1$, так как C постоянная матрица.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если система (2.1) допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i = \text{const} \ (i = 1, \dots, k; \ 1 \leqslant k \leqslant n)$$

и для системы (2.5) существует определенно-положительная функция $V(y_{k+1}, \dots, y_n)$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{\|y\|_{n-k}\to\infty} V(y) = \infty$, производная которой в силу системы (2.5) удовлетворяет условиям

а) $\dot{V} = W < 0$ вне K,

б) $\dot{V} = W = 0$ на K,

равномерно по c_i, где $K \subset \{y_{k+1}, \dots, y_n)\} \subset R^{n-k}$—многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы (2.5) при $T \leqslant t < \infty$, то система (2.1) устойчива по действующей силе.

Доказательство. Пусть система (2.1) допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i = \text{const} \ (i = 1, \dots, k; \ 1 \leqslant k \leqslant n).$$

Как показано выше, в этом случае систему (2.2) можно привести к виду (2.8) — (2.9).

Интегрируя систему (2.8), получим

$y_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\psi_i(\tau)\,d\tau$ и $y_i(t) = \int\limits_{t_0}^{T}\psi_i(t)\,dt = c_i$ при $t \geqslant T$ $(i = 1, \dots, k)$. Оценим величину $\|y(t)\|_k = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} y_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$ при $t \geqslant T$:

$$\|y(t)\|_k = \|\int_{t_0}^{T}\bar{\psi}(t)\,dt\|_k < \delta_1. \tag{2.10}$$

По условию теоремы 2.1, для системы (2.5) имеет место теорема Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4] равномерной по c_i. Следовательно, для решений системы (2.9) получаем

$$y_i(t)\to 0, \text{ при } t\to\infty \quad (i=k+1, \ldots, n). \tag{2.11}$$

Тогда согласно (2.10) и (2.11) для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon, y_0)>0$ и момент времени $t_*>T$ такие, что

$$\| y(t) \|_n=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \quad \text{при } t\geqslant t_*, \text{ если } \|y_0\|_n=\left(\sum_{i=1}^{n} y_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\delta.$$

Таким образом теорема доказана.

§ 3. Пример. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y^3x^2,\\ \dot{y}&=-2y^2x^5.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Система (3.1) устойчива по Ляпунову, так как существует определенно-положительная функция $V=x^4+y^2$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об устойчивости [3] (стр. 82). Система (3.1) допускает первый интеграл вида

$$x^4+y^2=c=\text{const}, \tag{3.2}$$

т. е. в фазовом пространстве (x, y) траектории системы (3.1) замкнуты и имеют «центр» в начале координат.

Пусть $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0\neq 0$. Так как траектории системы (3.1) в фазовом пространстве замкнуты, то существует момент $t_1>t_0$ такой, при котором

$$y(t_1)=0, \quad x(t_1)=\sqrt[4]{c} \quad (c=x_0^4+y_0^2>0).$$

Если на систему (3.1) действуют силы вида

$$\varphi_1(t)=p\delta(t-t_1), \quad \varphi_2(t)\equiv 0,$$

то система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y^3x^2+p\delta(t-t_1),\\ \dot{y}&=-2y^2x^5,\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $p>0$—заданная величина.

Тогда при $t>t_1$ траектории системы (3.3) будут

$$x^4+y^2=(p+\sqrt[4]{c})^4, \tag{3.4}$$

где принято $x(t_1-0)=\sqrt[4]{c}$, $x(t_1+0)=p+\sqrt[4]{c}$, $y(t_1)=0$.

Из (3.4) видно, что существует момент $t_2>t_1$ такой, при котором

$$y(t_2)=0, \; x(t_2)=-(p+\sqrt[4]{c}).$$

Если на систему (3.1) дополнительно действуют силы

$$\varphi_1(t)=p[\delta(t-t_1)-\delta(t-t_2)], \; \varphi_2(t)\equiv 0,$$

то она примет вид

$$\dot{x} = y^3x^2 + p[\delta(t-t_1) - \delta(t-t_2)], \qquad (3.5)$$
$$\dot{y} = -2y^2x^5.$$

При $t > t_2$ траектории системы (3.5) будут

$$x^4 + y^2 = [-(2p + \sqrt[4]{c})]^4 \quad (x(t_2+0) = -(2p + \sqrt[4]{c});\ y(t_2) = 0).$$

Следовательно, при выборе $T \geqslant t_2 > t_1 > t_0$ получим

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\,dt \right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\int_{t_0}^{T} \varphi_i(t)\,dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 < \delta$$

и при $\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 < \delta$ нельзя утверждать, что

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|_2 < \varepsilon \text{ при } t \geqslant T.$$

Таким образом, показали, что система (3.1) устойчива по Ляпунову, но неустойчива по действующей силе.

Рассмотренный пример показывает, что если нелинейная система (устойчивая по Ляпунову) допускает нелинейные первые интегралы, то она может быть неустойчивой по действующей силе.

Кафедра механики
Поступила 31.03.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шагинян С. Г.* Об одной задаче теории устойчивости, Ученые записки ЕГУ, 1986, № 2.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат: 1950.
4. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом.—ПММ: 1954, т. 18, вып. 3.

Ամփոփում

Դիտարկվում է ոչ գծային ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի կայունության խնդիրը, երբ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր գրգռող ուժեր։ Լյապունովի ֆունկցիաների միջոցով գծային ստացիոնար համակարգերի համար ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում համակարգը կայուն է ըստ ազդող ուժի [1]։

Որոշված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ոչ գծային համակարգը կայուն է ըստ ազդող ուժի։

Կառուցված է կոնկրետ օրինակ, որտեղ համակարգը դառնում է անկայուն, երբ նշված պայմանները չեն պահպանվում։

Summary

The problem of stability of the system of non-linear stationary differential equations is considered when perturbating forces of small integral act on the system during finite time interval. By means of Lyapunov's functions necessary and sufficient conditions have been obtained for linear stationary systems in case of which the system is stable for any acting forces [1]. The sufficient conditions in case of which the non-linear system is stable for any acting forces have been defined. A concrete example has been constructed where the system becomes instable when the mentioned conditions are not kept.